

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ» (ПГУ)
СРЕДНЕВОЛЖСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО



Аналитические и численные методы
моделирования естественно-научных
и социальных проблем
(АЧМ–2023)

*Сборник статей по материалам
XVIII Всероссийской с международным участием
научно-технической конференции с конкурсом научно-
исследовательских работ для обучающихся, посвященной
80-летию Пензенского государственного университета
и 80-летию кафедры «Высшая и прикладная математика»*

Россия, г. Пенза, 6–10 ноября 2023 г.

В двух частях

Часть 2

П о д р е д а к ц и е й
доктора физико-математических наук,
профессора И. В. Бойкова

Пенза • Издательство ПГУ • 2023

УДК 51
ББК 22.1
А64

Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем (АЧМ–2023) : сб. ст. по материалам XVIII Всерос. с междунар. участием науч.-техн. конф. с конкурсом научно-исследовательских работ для обучающихся, посвящ. 80-летию Пензенского государственного университета и 80-летию кафедры «Высшая и прикладная математика» (г. Пенза, 6–10 ноября 2023) : в 2 ч. / под ред. д.ф.-м.н., проф. И. В. Бойкова. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2023. – Ч. 2. – 196 с.

ISBN 978-5-907752-91-7 (ч. 2)

ISBN 978-5-907752-89-4

Отражены основные результаты работы конференции, охватывающие следующие направления научных исследований: уравнения математической физики; теорию приближения и кубатурные формулы; численные методы; математические модели экономики, экологии, демографии, социальных наук; математические модели в физике, нанотехнике и нанобиологии; нейроматематику и нейрокомпьютеры; информационные технологии в образовании.

Издание предназначено для обучающихся по направлению подготовки 01.03.04 «Прикладная математика» и специалистов в области вычислительной математики и математического моделирования.

УДК 51
ББК 22.1

Программный комитет

И. В. Бойков, д.ф.-м.н., профессор (Пенза, Россия) – *председатель*;
В. И. Паньженский, к.ф.-м.н., профессор (Пенза, Россия) – *заместитель председателя*; **Д. В. Артамонов**, д.т.н., профессор (Пенза, Россия);
В. И. Горбаченко, д.т.н., профессор (Пенза, Россия); **В. П. Ильин**, д.ф.-м.н., профессор (Новосибирск, Россия); **В. Д. Кревчик**, д.ф.-м.н., профессор (Пенза, Россия); **П. П. Макарычев**, д.т.н., профессор (Пенза, Россия);
П. С. Мартышко, д.ф.-м.н., профессор, член-корреспондент РАН (Екатеринбург, Россия); **М. В. Носков**, д.ф.-м.н., профессор (Красноярск, Россия); **В. И. Половинкин**, д.ф.-м.н., профессор (Санкт-Петербург, Россия);
В. С. Сизиков, д.т.н., профессор (Санкт-Петербург, Россия); **Д. Н. Сидоров**, д.ф.-м.н., профессор, профессор РАН (Иркутск, Россия); **Ю. Г. Смирнов**, д.ф.-м.н., профессор (Пенза, Россия); **Л. А. Сухарев**, к.ф.-м.н., доцент (Саранск, Россия);
С. Фаудаоглы, д.ф.-м.н., профессор (Измир, Турция); **Л. Р. Фионова**, д.т.н., профессор (Пенза, Россия); **М. А. Щербаков**, д.т.н., профессор (Пенза, Россия)

Ответственный секретарь конференции

Л. А. Купряшина, к.пед.н., доцент (Пенза, Россия)

Мероприятие проведено в рамках реализации в форме субсидий из федерального бюджета образовательным организациям высшего образования на реализацию мероприятий, направленных на поддержку студенческих научных сообществ (соглашение о предоставлении из федерального бюджета грантов в форме субсидий от 15.06.2023 № 075-15-2023-546 на реализацию мероприятий, направленных на поддержку студенческих научных сообществ)

П р и к а з

о проведении XVIII Всероссийской с международным участием научно-технической конференции «Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем» (АЧМ–2023)

№ 833/о от 21.07.2023

ISBN 978-5-907752-91-7 (ч. 2)
ISBN 978-5-907752-89-4

© Пензенский государственный университет, 2023

УДК 519.6

ПРОГРАММНЫЕ АЛГОРИТМЫ ГЕНЕРАТОРОВ СЛУЧАЙНЫХ ЧИСЕЛ

*Ильдар Ильясович Бибарсов¹,
Владислав Сергеевич Шильчиков²,
Алексей Анатольевич Масленников³*

^{1,2,3} Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

¹ bibarsovildar2004@icloud.com, ² vladislavtop999@gmail.com,
³ almas@rambler.ru

Аннотация. Рассматриваются простейшие алгоритмы построения генераторов псевдослучайных чисел. Описываются их достоинства и недостатки с точки зрения программного построения алгоритма и надежности.

Ключевые слова: генератор псевдослучайных чисел, линейный конгруэнтный метод, запаздывающие генераторы Фибоначчи

SOFTWARE ALGORITHMS OF RANDOM NUMBER GENERATORS

*Ildar I. Bibarsov¹, Vladislav S. Shilchikov²,
Alexey A. Maslennikov³*

^{1,2,3} Penza State University, Penza, Russia

¹ bibarsovildar2004@icloud.com, ² vladislavtop999@gmail.com,
³ almas@rambler.ru

Abstract. The simplest algorithms for constructing pseudo-random number generators are considered. Their advantages and disadvantages are described from the point of view of the software construction of the algorithm and reliability.

Keywords: pseudorandom number generator, linear congruent method, delayed Fibonacci generators

Введение

Аппаратный генератор случайных чисел – устройство, которое генерирует последовательность случайных чисел на основе измеряемых, хаотически изменяющихся параметров протекающего физического процесса. Работа таких устройств часто основана на использовании надёжных источников энтропии, таких, как тепловой шум, дробовой шум, фотоэлектрический эффект, квантовые явления и т.д. Эти процессы в теории абсолютно непредсказуемы, на практике же получаемые из них случайные числа проверяются с помощью специальных статистических тестов.

Однако программными средствами реализовать подобный функционал не представляется возможным. Мы лишь можем написать алгоритм, основанный на математических законах и формулах, который будет генерировать число близкое к случайному, то есть «псевдослучайное» или же «псевдорандомное». Но бывает и такое, что алгоритмы зацикливаются и псевдорандом начинает напоминать логическую последовательность [1].

Генератор псевдослучайных чисел (ГПСЧ) – алгоритм, генерирующий последовательность чисел, элементы которой почти независимы друг от друга и подчиняются заданному распределению (обычно равномерному).

Метод середины квадратов

Метод середины квадратов был изобретён и предложен американским математиком Джоном фон Нейманом в 1946 г. Этот метод базировался на том, что каждое последующее число в псевдослучайной последовательности формировалось возведением предыдущего числа в квадрат и отбрасыванием цифр с обоих концов. Однако этот метод оказался ненадежным, и от него быстро отказались [2].

Линейный конгруэнтный метод

Линейный конгруэнтный метод – самый простой генератор псевдослучайных чисел, входит в состав компиляторов большинства языков программирования случаях и не обладает криптографической стойкостью. Данный алгоритм был предложен Дериком Генри Лемером в 1949 г. Метод заключается в вычислении последовательности по заданной формуле:

$$X_{n+1} = (aX_n + c) \bmod m,$$

где m – число, относительно которого берётся остаток от деления; a – множитель; c – приращение [3].

Данный метод для достижения большей эффективности в реализации обладает следующими параметрами: $m \geq 2$, $0 \leq a \leq m$, $0 \leq c < m$, $0 \leq X_0 < m$, $n \geq 0$. Программная реализация данного алгоритма на языке программирования C++ представлена на рис. 1.

```
#define RAND_MAX 32767

static unsigned long int next = 1;

int rand(void)
{
    next = next * 1103515245 + 12345;
    return (unsigned int)(next/65536) % (RAND_MAX + 1);
}
```

Рис. 1

Ясно, что последовательность чисел, генерируемая таким алгоритмом, периодична с периодом, не превышающим m . При этом длина периода равна m тогда и только тогда, когда:

- НОД (c, m) = 1 (то есть c и m взаимно просты);
- $(a - 1)$ кратно p для всех простых p – делителей m ;
- $(a - 1)$ кратно 4, если m кратно 4.

Статистические свойства получаемой последовательности случайных чисел полностью определяются выбором констант a и c при заданной разрядности.

Для линейных конгруэнтных генераторов в различных языках программирования есть, так называемые, «хорошие константы». Для C/C++ это: $a = 1103515245$, $c = 12\,345$, $m = 2^{31}$. Для Java это: $a = 25\,214\,903\,917$, $c = 11$, $m = 2^{48}$.

«Хорошие константы» вводятся потому что линейные конгруэнтные генераторы имеют свойство зацикливаться, поэтому при помощи «хороших констант» мы можем получить максимальное количество псевдорандомных чисел пока алгоритм не заиклится.

Аддитивные генераторы (запаздывающие генераторы Фибоначчи)

Генераторы Фибоначчи, в отличие от линейного конгруэнтного метода, можно использовать в статистических алгоритмах, требующих высокого разрешения.

Интересный класс генераторов псевдослучайных последовательностей основан на использовании последовательностей Фибоначчи. Классический пример такой последовательности $\{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots\}$ – за исключением первых двух ее членов, каждый последующий член равен сумме двух предыдущих.

Особенности распределения случайных чисел, генерируемых линейным конгруэнтным алгоритмом, делают невозможным их использование в статистических алгоритмах, требующих высокого разрешения.

В связи с этим линейный конгруэнтный алгоритм постепенно потерял свою популярность, и его место заняло семейство фибоначчьевых алгоритмов, которые могут быть рекомендованы для использования в алгоритмах, критичных к качеству случайных чисел. В англоязычной литературе фибоначчьевы датчики такого типа называют обычно «Subtract-with-borrow Generators» (SWBG).

Наибольшую популярность фибоначчьевы датчики получили в связи с тем, что скорость выполнения арифметических операций с вещественными числами сравнялась со скоростью целочисленной арифметики.

Известны разные схемы использования метода Фибоначчи с запаздыванием. Один из широко распространённых фибоначчьевых датчиков основан на следующей рекуррентной формуле:

$$k_i = \begin{cases} k_{i-a} - k_{i-b}, & \text{если } k_{i-a} \geq k_{i-b} \\ k_{i-a} - k_{i-b} + 1, & \text{если } k_{i-a} < k_{i-b} \end{cases},$$

где k_i – вещественные числа из диапазона $[0,1]$; a, b – целые положительные числа, параметры генератора. Для работы датчику требуется знать $\max\{a,b\}$ предыдущих сгенерированных случайных чисел. При программной реализации для хранения сгенерированных случайных чисел необходим некоторый объем памяти, зависящих от параметров a и b .

Пример. Вычислим последовательность из первых десяти чисел, генерируемую методом Фибоначчи с запаздыванием начиная с k_5 при следующих исходных данных: $a = 4, b = 1, k_0 = 0,1; k_1 = 0,7; k_2 = 0,3; k_3 = 0,9; k_4 = 0,5$:

$$k_5 = k_1 - k_4 = 0,7 - 0,5 = 0,2;$$

$$k_6 = k_2 - k_5 = 0,3 - 0,2 = 0,1;$$

$$k_7 = k_3 - k_6 = 0,9 - 0,1 = 0,8;$$

$$k_8 = k_4 - k_7 + 1 = 0,5 - 0,8 + 1 = 0,7;$$

$$k_9 = k_5 - k_8 + 1 = 0,2 - 0,7 + 1 = 0,5;$$

$$k_{10} = k_6 - k_9 + 1 = 0,1 - 0,5 + 1 = 0,6;$$

$$k_{11} = k_7 - k_{10} = 0,8 - 0,6 = 0,2;$$

$$k_{12} = k_8 - k_{11} = 0,7 - 0,2 = 0,5;$$

$$k_{13} = k_9 - k_{12} + 1 = 0,5 - 0,5 + 1 = 1;$$

$$k_{14} = k_{10} - k_{13} + 1 = 0,6 - 1 + 1 = 0,6.$$

Видим, что генерируемая последовательность чисел внешне похожа на случайную. И действительно, исследования подтверждают, что получаемые случайные числа обладают хорошими статистическими свойствами [4].

Для генераторов, построенных по методу Фибоначчи с запаздыванием, существуют рекомендуемые параметры a и b , так сказать, протестированные на качество. Например, исследователи предлагают следующие значения: $(a,b) = (55, 24), (17, 5)$ или $(97,33)$ (обычно, эти самые числа 24 и 55 называют *запаздываниями*). Качество получаемых случайных чисел зависит от значения константы a : чем оно больше, тем выше размерность пространства, в котором сохраняется равномерность случайных векторов, образованных из полученных случайных чисел. В то же время с увеличением величины константы a увеличивается объём используемой алгоритмом памяти [5].

Заключение

Истинная случайность непредсказуема, и ее сложно сгенерировать в компьютерных системах. В мире математики, где повсюду

используются записанные данные и формулы для прогнозов, все сложнее найти что-то случайное. Но в этом и ценность. Говорим ли мы о расчете при моделировании, о шифровании сообщений или о повышении фактора случайности в работе игровых автоматов, генераторы случайных чисел оказываются незаменимы в нашем обществе.

Список литературы

1. Хабр. Генерация псевдослучайных чисел в программировании. И как у меня псевдо-получилось их сгенерировать. URL: <https://habr.com/ru/articles/686190/> (дата обращения: 03.10.2023).

2. Метод середины квадрата. URL: https://studref.com/371013/informatika/metod_serediny_kvadrata (дата обращения: 10.09.2023).

3. Кадан А. М. Генерация псевдослучайных чисел (лекция 7). URL: http://mf.grsu.by/Kafedry/sp_cs/academic_process/el_thi/lect_07 (дата обращения: 15.09.2023).

4. Генерации псевдослучайных чисел методом Фибоначчи с запаздыванием. URL: <https://emkelektron.webnode.page/news/generatsii-psevdosluchajnykh-chisel-metodom-fibonachchi-s-zapazdyvaniem/> (дата обращения: 15.09.2023).

5. Аддитивные генераторы. URL: https://studbooks.net/2339914/tehnika/additivnye_generatory (дата обращения: 10.09.2023).

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА РИСКОВ ПРИОБРЕТЕНИЯ ЛИЧНОГО ТРАНСПОРТНОГО СРЕДСТВА В СЛОЖНОЙ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ СИТУАЦИИ

Валерия Олеговна Буран

Пензенский государственный университет, Пенза, Россия
buran.lera141253788@gmail.com

Аннотация. Рассматривается оценка рисков приобретения личного транспортного средства, взаимосвязь факторов, влияющих на рост цены годового обслуживания автомобиля. Анализируется динамика продажи автомобилей в стране, а также выгода владения личным транспортным средством на основе полученной корреляционной зависимости.

Ключевые слова: линейный коэффициент корреляции, уравнение линейного тренда, система линейных алгебраических уравнений, корреляционная зависимость, динамика тренда

STATISTICAL ASSESSMENT OF THE RISKS OF ACQUIRING A PERSONAL VEHICLE IN A DIFFICULT ECONOMIC SITUATION

Valeria O. Buran

Penza State University, Penza, Russia
buran.lera141253788@gmail.com

Abstract. This article examines the assessment of the risks of purchasing a personal vehicle, the relationship of factors affecting the growth of the price of annual car maintenance. The dynamics of car sales in the country is analyzed, as well as the benefits of owning a personal vehicle based on the obtained correlation.

Keywords: linear correlation coefficient, linear trend equation, system of linear algebraic equations, correlation dependence, trend dynamics

В работе рассматривается статистическая оценка рисков приобретения личного транспортного средства в сложной экономической ситуации. Этот вопрос остается актуальным в связи с необходимостью проведения анализа, что выгоднее: приобретение личного автомобиля или ежедневные поездки на такси.

Начиная с марта 2022 года, растут продажи автомобилей по стране, и прослеживается положительная динамика, по сравнению с докризисным периодом 2021 года. В 2023 году произошел максимальный

рост, по сравнению с предыдущим годом. В статье рассматривается процент и количество продаж, а так же используется подтвержденная статистика, приведенная в отчете Ассоциации европейского бизнеса (АЕВ). В 2023 году было продано 69,1 тыс., что на 49 % больше чем в 2022 году. Самыми продаваемыми транспортными средствами в 2023 году стали следующие марки автомобилей: Lada – 206 321, Haval – 60 518, ГАЗ* – 32 166, УАЗ* – 20 822, FAW – 6 064[1].

В начале 2023 года Яндекс Дзен [2] провел опрос на сайте авто.гу, в котором приняли участие 11 тыс. человек. Опрос был проведен с целью, узнать сколько людей планируют покупать автомобиль. Итогом оказалось, что 22 % из числа опрошенных предпочли бы в 2023 году обрести личное средство передвижение. Оказалось, что 78 % опрошенных отказались покупать новую машину в связи с ростом цен на её обслуживание.

Тинькофф Журнал [3] в разделе подсчёты читателей собрал сведения о содержании автомобиля. В табл. 1 представлены некоторые данные и средние показатели обслуживания личного транспорта среднего ценового сегмента.

Таблица 1

Годовая стоимость обслуживания автомобиля

Марка	Налог, руб./г	Страховка, руб./г	ТО, руб./г	Бензин, руб./г	В год, руб./г (х)	Расход топлива, л/км	Стоимость расхода топлива, л*руб./км (у)
Subaru Outback	7500	7000	10 000	15 000	39 500	0,15	8,5
Lada Priora	3000	7000	8900	22 000	40 900	0,0765	4,34
Lada Vesta	1989	5613	10 000	51 234	68 836	0,0795	4,5
Honda Civic 4D	4900	8000	10 000	40 000	62 900	0,0865	4,9
Среднее	4347,25	6903,25	9725	32058,5	53034	0,098	5,56

Показатели стоимости 1 литра топлива и его увеличения стоимости за 2022/2023 года представлены в табл. 2 [4], [5].

Таблица 2

Рост цен на бензин 2022/2023

Вид топлива	2023, руб./л	2022, руб./л	Разница (Y)	Порядковый номер топлива (t)	Квадрат порядкового номера топлива (t ²)	Произведение параметров (Y*t)
АИ-92	49,44	47,13	2,31	1	1	49,44
АИ-95	53,97	51,20	2,77	2	2	107,94
АИ-98 и выше	64,40	60,12	4,28	3	9	193,2
Дизельное топливо	58,80	54,46	3,62	4	16	235,2
Всего	226,61	212,91	12,98	10	28	585,78
Среднее	56,65	53,23	3,25	–	–	146,45

Тенденцию изменения стоимости бензина графически иллюстрирует рис. 1.

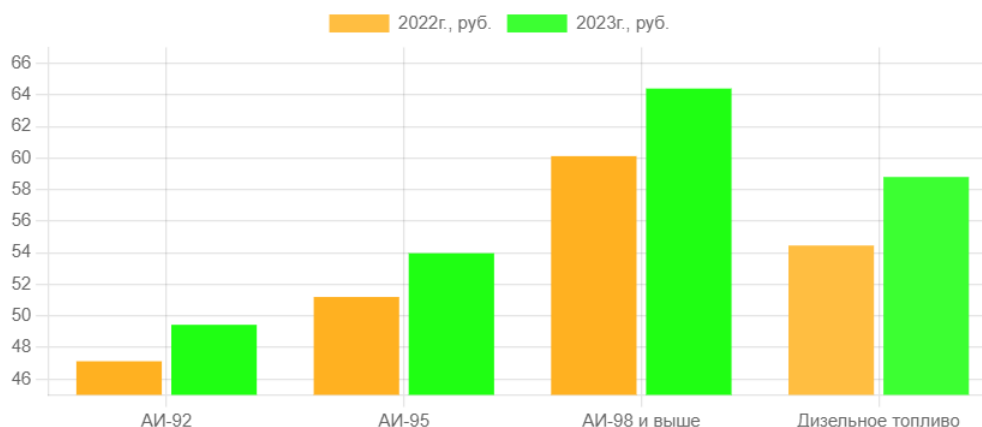


Рис. 1. Рост цены на бензин за 2022/2023 гг.

Средний расход стоимость за 1 литр топлива описывается уравнением линейного тренда [6]. В общем виде это уравнение имеет вид (1):

$$Y_t = a + bt, \quad (1)$$

где a и b – параметры прямой, t – показатель топлива.

Для нахождения параметров a и b необходимо решить систему алгебраических уравнений (2):

$$\begin{cases} \sum Y = na + b \sum t, \\ \sum Yt = a \sum t + b \sum t^2, \end{cases} \quad (2)$$

Из полученных данных и приведенных расчетов, полученное уравнение (1) запишется в виде (3):

$$Y_t = -457,863 + 184,44t, \quad (3)$$

где $a = -457,863$, $b = 184,44$.

В результате оценивания проявляется отрицательная динамика тренда, так как $a < 0$. Это означает, что в 2023 году один литр бензина обойдется на 458 р. дороже, чем в 2022 году.

Из средних значений показателей обслуживания личного транспортного средства, представленных в табл. 1, больше всего потребитель тратит денег на бензин. Исходя из этого, необходимо рассмотреть взаимосвязь стоимости расхода топлива на 100 км и общей стоимости обслуживания в год. Для этого нужно оценить тесноту линейной корреляционной зависимости и указать её направление. Данные представлены в табл. 3.

Таблица 3

Фрагмент Таблицы 1

Марка	В год, руб./г (x)	Стоимость расхода топ- лива, л*руб./км (y)	xy	x ²	y ²
Subaru Outback	39 500	8,5	335 651,3	1 560 250 000	140,182
Lada Priora	40 900	4,34	177 249,3525	1 672 810 000	18,78117
Lada Vesta	68 836	4,5	310 014,9723	4 738 394 896	20,28309
Honda Civic 4D	62 900	4,9	308 224,1525	3 956 410 000	24,01221
Среднее	53 034	5,56	282 785	2 981 966 224	50,815

Пусть x – годовое обслуживание автомобиля, y – стоимость расхода топлива на 100 км, тогда можно рассчитать коэффициент корреляции в виде (5) [7].

$$r_{xy} = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sigma_x \sigma_y}, \quad (5)$$

где $\overline{xy}$ – среднее значение произведения признаков; $\bar{x}$, $\bar{y}$ – средние значения признаков; $\sigma_x \sigma_y$ – стандартные отклонения признаков.

Используя полученные данные табл. 3, были получены следующие значения для уравнения (5):

$$\overline{xy} = \frac{\sum x_i y_i}{n} = 24536879,92$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = 53034$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = 5,56$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n} - (\bar{x})^2} = 13013,88$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum y_i^2}{n} - (\bar{y})^2} = 1,7$$

В результате, линейный коэффициент корреляции равен $r_{xy} = -0,54$. Это даёт возможность говорить о значимой обратной линейной корреляционной зависимости обслуживания автомобиля в год и стоимости расхода топлива на 100 км. Это значит, что с увеличением цены на топливо, растёт и цена на годовое обслуживание автомобиля.

Проводилось сравнение средней стоимости поездки на такси по Пензенской области, от района Арбеково до ПГУ по среднему ценовому сегменту (1) и собственном автомобиле (2), где стоимость поездки на такси равна 246 рублей, расстояние составляет 11 км. Стоимость поездки на собственной машине, в результате расчёта, взяв среднюю стоимость расхода топлива из табл. 2, обойдется в 61,16 рублей, что в 4 раза дешевле, чем поездка на такси.

Оценив годовые затраты на такси – 89 790 р. и обслуживание машины (без налогов и страховки) – 22 323,4 р., и оценив, все средние годовые расчеты из табл. 2 – 43289,9. Учитывая все полученные данные и сравнив их, можно сказать, что обслуживание личного транспорта выгоднее почти в два раза и пользование личным транспортом обходится дешевле, чем ежедневные поездки на такси в течение года.

Список литературы

1. URL: <http://greenway.icnet.ru/cars-sales-actual-russia.html#null>
2. URL: <https://dzen.ru/a/Y9O-0uy1dlk8MdGU>
3. URL: <https://journal.tinkoff.ru/pay-to-ride/>
4. URL: https://rosstat.gov.ru/storage/mediabank/131_23-08-2023.html
5. URL: https://rosstat.gov.ru/storage/mediabank/140_24-08-2022.html
6. Кизбикенов К. О. Прогнозирование и временные ряды : учеб. пособие. Барнаул : АлтГПУ, 2017.
7. Кремер Н. Ш. Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. для вузов. 2-е изд., перераб. и доп. М. : ЮНИТИ ДАНА, 2004. 573 с.

НЕЙРОМАТЕМАТИКА

*Максим Александрович Бутков¹,
Елена Геннадьевна Романова²*

^{1,2} Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

¹ butkov_06@mail.ru

Аннотация. На первый взгляд математика и нейробиология могут казаться совершенно разными областями, но на самом деле они тесно связаны друг с другом. Наш мозг, работая с математическими задачами, использует определенные нейронные сети и паттерны активности, чтобы исследовать, анализировать и решать различные числовые проблемы. С помощью нейроматематики ученые стремятся понять, какие процессы происходят в мозге при выполнении математических операций и как эти знания могут быть применены для улучшения процесса обучения математике. Например, развитие нейроматематики может способствовать разработке новых методов обучения, основанных на принципах работы мозга, или помочь людям с нарушениями.

Ключевые слова: нейроматематика, нейробиология, нейронная сеть, математическая модель, математические алгоритмы, математические структуры

NEUROMATHEMATICS

Maksim A. Butkov¹, Elena G. Romanova²

^{1,2} Penza State University, Penza, Russia

¹ butkov_06@mail.ru

Abstract. At first glance, mathematics and neuroscience may seem to be completely different fields, but in fact they are closely related to each other. Our brain, working with mathematical problems, uses certain neural networks and patterns of activity to explore, analyze and solve various numerical problems. With the help of neuromathematics, scientists strive to understand what processes occur in the brain when performing mathematical operations, and how this knowledge can be applied to improve the learning process of mathematics. For example, the development of neuromathematics can help develop new teaching methods based on the principles of brain work, or help people with impaired mathematical skills.

Keywords: neuromathematics, neurobiology, neural network, mathematical model, mathematical algorithms, mathematical structures

Введение

Нейроматематика – это область науки, которая объединяет математику и нейробиологию в попытке понять и объяснить, как работает наш мозг при обработке математической информации.

Применение нейроматематики имеет широкий спектр возможностей. Она может быть использована для разработки интеллектуальных систем, способных обрабатывать большие объемы данных и делать точные прогнозы. Например, нейроматематика может быть применена в финансовой аналитике для прогнозирования рыночных тенденций и определения оптимальных инвестиций. Кроме того, нейроматематика может быть полезна в медицине. Изучение математических моделей мозга может помочь в понимании причин некоторых неврологических заболеваний и разработке новых методов исследования и лечения. Интересно отметить, что нейроматематика может быть применена не только в науке, но и в повседневной жизни. Она может помочь нам лучше понять, как мы принимаем решения и почему мы предпочитаем определенные варианты. Это может быть полезно при разработке улучшенных систем рекомендаций или в области искусственного интеллекта.

Нейроматематика является одним из полезных инструментов для развития логического мышления. Понимание и применение математических принципов требуют аналитического и абстрактного мышления, что способствует тренировке мозга и улучшению его функционирования в целом. Более того, умение мыслить логически может быть применено в различных сферах жизни, от решения повседневных задач до принятия сложных деловых и жизненных решений.

Одним из дополнительных преимуществ нейроматематики является развитие способности к абстрактному мышлению и воображению. Изучение математики позволяет увидеть связи и закономерности, научиться креативно мыслить и находить нестандартные решения. Это стимулирует развитие инновационности и изобретательности у человека. Например, многие великие открытия и изобретения были сделаны благодаря способности искать новые подходы и решения, которые часто требуют абстрактного мышления.

Таким образом, нейроматематика не только развивает логическое мышление, но и способствует развитию навыков решения задач, абстрактного мышления и воображения, а также улучшает память и концентрацию. Эти навыки могут быть полезными во многих сферах жизни, помогая нам стать более аналитичными, творческими и успешными в решении сложных проблем.

Важной составляющей будущего нейроматематики является создание бионического мозга, способного решать сложные математические задачи. Это приведет к значительному продвижению в понимании мозговых процессов, связанных с математикой, и запустит новую эру в искусственном интеллекте.

Кроме того, нейроматематика может найти разнообразное применение на практике. При развитии нейроматематики будут созданы

новые методы обучения, позволяющие эффективнее усваивать математические знания и забыть о страхе перед этой наукой. Также, нейроматематика поможет оптимизировать стратегии принятия решений и улучшить алгоритмы, используемые в науке, технологии и экономике [1].

Практическая часть

В ходе изучения данной темы была составлена программа, предназначенная как для развития внимательности, так и для развития логического мышления ребенка дошкольного возраста.

З а д а ч а:

1) Вводить буквы русского алфавита по их порядковому номеру (с помощью табл. 1)

2) После выполнения задания №1 ребенок должен объяснить смысл данной пословицы

О т в е т ы:

1) Делу время, потехе час.

2) Делу нужно уделять свое основное время, а вот досугу и увлечению – совсем немного.

Таблица 1

А	Б	В	Г	Д	Е	Ё	Ж	З	И	Й
01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11
К	Л	М	Н	О	П	Р	С	Т	У	Ф
12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
Х	Ц	Ч	Ш	Щ	Ъ	Ы	Ь	Э	Ю	Я
23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33

Итоги работы программы приведены на рис. 1, 2, 3.

The screenshot shows a window titled "Form1" with the following elements:

- Task description:** "Задача: Вместо порядкового номера буквы в русском алфавите, записать саму букву" (Task: Instead of the ordinal number of the letter in the Russian alphabet, write the letter itself).
- Numbers:** "5, 6, 13, 21 пробел 3, 18, 6, 14, 33 пробел 17, 16, 20, 6, 23, 6, пробел 25, 1, 19." (5, 6, 13, 21 space 3, 18, 6, 14, 33 space 17, 16, 20, 6, 23, 6, space 25, 1, 19).
- Input field:** "Введите строчные буквы" (Enter lowercase letters) with a text box below it.
- Button:** "Нажмите после ввода" (Click after input).
- Proverb field:** "Пословица:" (Proverb:) with a text box below it.

Рис. 1

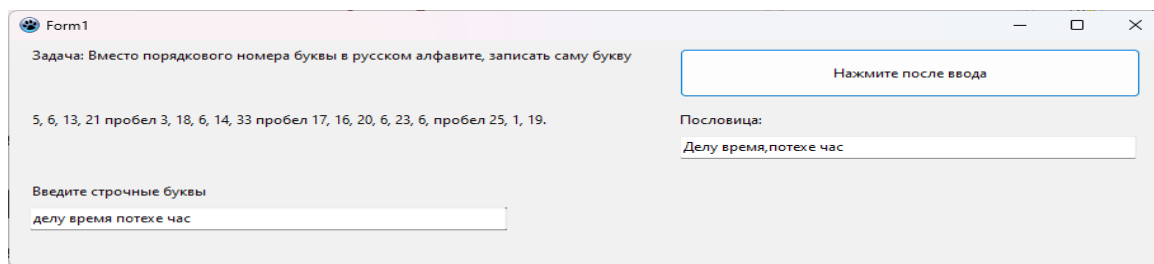


Рис. 2

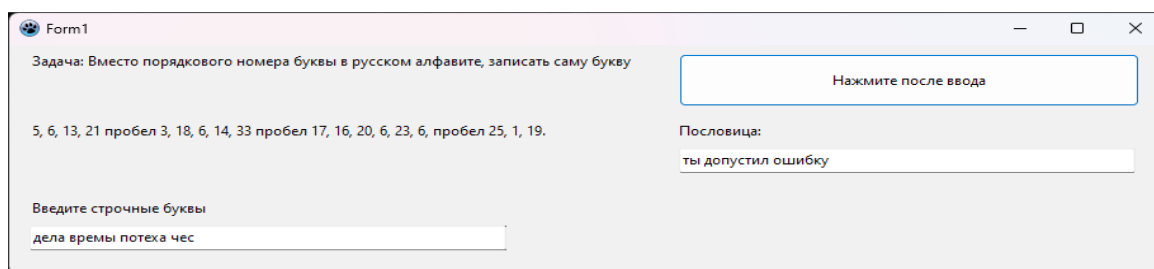


Рис. 3

В качестве языка программирования для разработки задачи был выбран объектно- ориентированная среда программирования на языке object pascal. Одна из основных причин использования языка pascal в машинном обучении – наличие множества объектов, которые упрощают процесс написания кода и сокращают время на разработку.

В качестве сервиса для разработки python-приложений был выбран Colaboratory (Colab), так как это хорошее решение специалистов по обработке данных и исследователей в области искусственного интеллекта.

Бесплатный сервис lazarus позволяет писать и выполнять код pascal. При этом:

- не требуется никакой настройки;
- осуществляется бесплатный доступ к графическим процессорам;
- наличие огромного количества объектов

Алгоритм программы

```
c:=edit3.text;
if c='делу время потехе час' then edit2.text:='Делу время,потехе
час' else
edit2.text:='ты допустил ошибку'
```

В ходе решения данной задачи у ребенка развивается внимательность, память, алгоритмизация и логичность мышления.

Практическая польза от нейроматематики заключается в возможности разработки новых методов обучения математике для школьников и студентов, а также создания математических моделей для решения реальных проблем в различных областях.

Список литературы

1. Нейроматематика в машинном обучении. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/neuromatematika-v-mashinnom-obuchenii>

ПРИМЕНЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ К ОПИСАНИЮ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ

Артём Витальевич Бутусов

Пензенский государственный университет, Пенза, Россия
artyombutusov@yandex.ru

Аннотация. Исследуется применение дифференциальных уравнений в физических задачах на механические колебания.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, физические задачи, производная

APPLICATION OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS TO DESCRIPTION OF OSCILLATORY PROCESSES

Artem V. Butusov

Penza State University, Penza, Russia
artyombutusov@yandex.ru

Abstract. The application of differential equations in physical problems for mechanical vibrations is investigated.

Keywords: differential equations, physical problems, derivative

Введение

Дифференциальное уравнение – это уравнение, которое помимо независимых переменных и неизвестных функции данных переменных, содержит ещё и производные неизвестных функции [2].

Очень часто мы встречаем физические задачи, которые необходимо решить с помощью дифференциальных уравнений. Это объясняется тем, что многие физические законы записаны в виде 1-й и 2-й производной.

Задачи на механические колебания

Математическим маятником называют тело небольших размеров, подвешенное на тонкой, длинной и нерастяжимой нити, масса которой пренебрежимо мала по сравнению с массой тела. Только в случае малых колебаний математический маятник является гармоническим **осциллятором**, то есть системой, способной совершать гармонические (по закону $\sin$ или $\cos$) колебания. Практически такое

приближение справедливо для углов порядка $5\text{--}10^\circ$. Колебания маятника при больших амплитудах не являются гармоническими [3].

Циклическая частота колебаний математического маятника рассчитывается по формуле: $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$.

Период колебаний математического маятника: $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$.

Для **пружинного маятника** свободные колебания совершаются под действием внутренних сил системы после того, как система была выведена из положения равновесия. Для того, чтобы свободные колебания совершались по гармоническому закону, необходимо, чтобы сила, стремящаяся вернуть тело в положение равновесия, была пропорциональна смещению тела из положения равновесия и направлена в сторону, противоположную смещению. Таким свойством обладает сила упругости.

Таким образом, груз некоторой массы m , прикрепленный к пружине жесткости k , второй конец которой закреплен неподвижно, составляют систему, способную совершать в отсутствие трения свободные гармонические колебания. Груз на пружине называют **пружинным маятником**. [3]

Циклическая частота колебаний пружинного маятника рассчитывается по формуле: $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Период колебаний пружинного маятника: $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$.

Задача 1. [1] Математический маятник – тело малых размеров, подвешенное на тонкой нерастяжимой нити, масса которой пренебрежимо мала по сравнению с массой тела. В положении равновесия, когда маятник висит по отвесу, сила тяжести $m \cdot g$ уравнивается силой натяжения нити $F_{\text{упр}}$. При отклонении маятника из положения равновесия на некоторый угол φ появляется касательная составляющая силы тяжести (рис. 1)

$$F_{\tau} = -mg \cdot \sin \varphi.$$

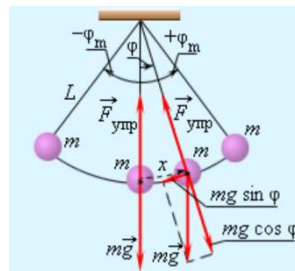


Рис. 1. Математический маятник

φ – угловое отклонение маятника от положения равновесия,

$x = l\varphi$ – смещение маятника по дуге

Знак «минус» в этой формуле означает, что касательная составляющая направлена в сторону, противоположную отклонению маятника. Если обозначить через x линейное смещение маятника от положения равновесия по дуге окружности радиуса l , то его угловое смещение: $\varphi = x/l$.

Второй закон Ньютона, записанный для проекций векторов ускорения и силы на направление касательной, дает:

$$ma_{\tau} = F_{\tau} = -mg \sin\left(\frac{x}{l}\right).$$

Это соотношение показывает, что математический маятник представляет собой сложную нелинейную систему, так как сила, стремящаяся вернуть маятник в положение равновесия, пропорциональна не смещению x , а

$$\sin\left(\frac{x}{l}\right).$$

В случае малых колебаний (для углов порядка $15\text{--}20^\circ$) приближенно $\sin(x/l)$ можно заменить x/l – данные величины отличаются не более чем на 2 %. Для малых колебаний математического маятника второй закон Ньютона записывается в виде

$$ma_{\tau} = F_{\tau} = -m \frac{g}{l} x, \quad a_{\tau} = -\frac{g}{l}.$$

Таким образом, тангенциальное ускорение a_{τ} маятника пропорционально его смещению x , взятому с обратным знаком. По общему правилу для всех систем, способных совершать свободные гармонические колебания, модуль коэффициента пропорциональности между ускорением и смещением из положения равновесия равен квадрату круговой частоты:

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

$$\frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} + \omega_0^2 \cdot \sin(\varphi(t)) = 0$$

Задача 2.[2] Тело массы 5 кг подвешено к концу пружины жёсткости 20 Н/м и помещено в вязкую среду. Период его колебаний в этом случае равен 10 с. Найти постоянную демпфирования, логарифмический декремент колебаний и период свободных колебаний.

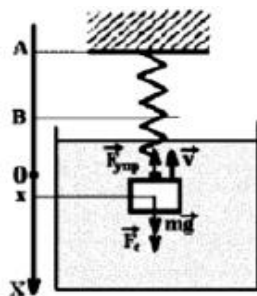


Рис. 2

Р е ш е н и е. Выберем начало координат в положении статического равновесия тела и расставим силы, действующие на тело в процессе колебаний (рис. 2). Если АВ обозначает длину не растянутой пружины, то отрезок ОВ представляет статическое удлинение пружины под действием силы тяжести.

По закону Гука

$$mg = kOB$$

Записываем второй закон Ньютона:

$$m\ddot{x} = \overline{F_{\text{всп}}} + \overline{F_d} + m\vec{g}.$$

Проектируем это равенство на ось ОХ, учитывая, что

$$F_{\text{всп}} = -av_x = -ax, F_{\text{упр}} = -k(x + OB).$$

В результате получим уравнение колебаний

$$m\ddot{x} = -a\dot{x} - k(x + OB) + mg = -a\dot{x} - kx$$

или

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (1)$$

где $n = \frac{a}{2m}$; $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$.

Уравнение (1) – это дифференциальное уравнение второго порядка. Составляем характеристическое уравнение:

$$r^2 + 2nr + \omega_0^2 = 0. \quad (2)$$

Вычисляем дискриминант уравнения (2):

$$D = n^2 - \omega_0^2. \quad (3)$$

Поскольку в данном случае движение тела носит колебательный характер, то его координата должна изменяться по гармоническому закону.

$$x = e^{-\lambda t} (C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)) \quad (4)$$

В случае отсутствия затухания, $\omega = \omega_0$, и тело совершает свободные колебания с периодом

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - n^2}}.$$

Выражаем отсюда

$$n = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2},$$

и определяем постоянную деформирования a :

$$a = 2mn = 2m\sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2}.$$

Подставляя данный задачи, получим ответ: $a = 19 \text{ (Н}\cdot\text{с)/м}$.

Логарифмический декремент затухания есть натуральный логарифм отношения двух последовательных амплитуд, $\Delta = n \frac{T}{2}$.

Вычисляя n и подставляя значение T , получим $\Delta = 9,5$.

Список литературы

1. Гриншпон Я. С. Геометрические, физические и экономические задачи, сводящиеся к дифференциальным уравнениям. Томск, 2011. 74 с.
2. Демидович Б. П., Марон И. А. Основы вычислительной математики. М. : ГИФМЛ, 1963. 660 с.
3. Колебания // EDUCON.BY. URL: <https://educon.by/index.php/materials/phys/kolebania>

АППРОКСИМАЦИЯ ИНТЕГРАЛОВ ОТ БЫСТРО ОСЦИЛЛИРУЮЩИХ ФУНКЦИЙ

*Данила Романович Вечкасов¹,
Александр Николаевич Тында²*

^{1,2} Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

¹ vechkasov.danila@yandex.ru, ² tynda@pnzgu.ru

Аннотация. Исследуется асимптотический метод вычисления интегралов от быстро осциллирующих функций. Получены асимптотические разложения для интегралов определенного типа. Приводятся примеры.

Ключевые слова: аппроксимация, асимптотические методы, осциллирующие функции

APPROXIMATION OF INTEGRALS OF RAPIDLY OSCILLATING FUNCTIONS

Danila R. Vechkasov¹, Aleksandr N. Tynda²

^{1,2} Penza State University, Penza, Russia

¹ vechkasov.danila@yandex.ru, ² tynda@pnzgu.ru

Abstract. An asymptotic method for calculating integrals from fast-oscillating functions is investigated. Asymptotic expansions for integrals of a certain type are obtained. Examples are suggested.

Keywords: approximation, asymptotic methods, oscillating functions

1. Постановка задачи

Численное интегрирование интегралов от быстро осциллирующих затруднено в связи с тем, что в нижнюю оценку погрешности большинства таких методов, так или иначе, входит максимум производной некоторого порядка, которая, на практике, может быть очень большой [1].

В связи с этим, существуют другие подходы к вычислению таких интегралов [1, 2]. Одним из них является асимптотический метод, которому и посвящена данная статья.

Будем рассматривать интегралы вида

$$\int_a^b f(x) e^{i\omega g(x)} dx \quad (1)$$

Функции $f(x)$ и $g(x)$ называются амплитудой и фазой соответственно, величина ω называется константой осцилляции. Амплитуду

и фазу в рассматриваемой теории будем считать гладкими, непрерывными, непериодическими (неосциллирующими) функциями на отрезке интегрирования.

Быстрая осцилляция достигается как достаточно большим значением ω (например, $\omega = 1000$), так и быстрым ростом функции фазы $g(x)$ на отрезке интегрирования (например $g(x) = x^{10}, x \in [10, 20]$).

Наиболее простым случаем интеграла (1) является интеграл с линейной функцией фазы $g(x) = x$:

$$\int_a^b f(x) e^{i\omega x} dx \quad (2)$$

Во всех дальнейших рассуждениях будем считать, что функция $f(x)$, вместе со всеми её производными (до бесконечного порядка) является непрерывной величиной на всем отрезке интегрирования, включая концы отрезка a и b (функция вместе со всеми её производными непрерывна справа и слева соответственно).

2. Асимптотический анализ

Для простоты дальнейших рассуждений сначала найдём неопределённый интеграл:

$$\int f(x) e^{i\omega x} dx$$

Проинтегрируем последний интеграл по частям:

$$\int f(x) e^{i\omega x} = \frac{1}{i\omega} f(x) e^{i\omega x} - \frac{1}{i\omega} \int f'(x) e^{i\omega x} dx$$

Аналогично можно проинтегрировать $\int f'(x) e^{i\omega x} dx$. В итоге, после применения интегрирования по частям n раз, получим следующее выражение:

$$\int f(x) e^{i\omega x} = e^{i\omega x} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{f^{(k)}(x)}{(i\omega)^{k+1}} + \frac{1}{(i\omega)^{n+1}} \int f^{(n+1)}(x) e^{i\omega x} dx$$

Теперь вернёмся к определённому интегралу (2), подставив пределы интегрирования:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) e^{i\omega x} dx &= \left(e^{i\omega x} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{f^{(k)}(x)}{(i\omega)^{k+1}} \right) \Big|_a^b + \\ &+ \frac{1}{(i\omega)^{n+1}} \int f^{(n+1)}(x) e^{i\omega x} dx \end{aligned} \quad (3)$$

Остаточный член:

$$R_n = \frac{1}{(i\omega)^n} \int_a^b f^{(n)}(x) e^{i\omega x} dx$$

После того, как получено выражение для частичной суммы ряда (3), рассмотрим вопрос о его сходимости при $n \rightarrow \infty$. Введем функцию:

$$S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{f^{(k)}(x)}{(i\omega)^{k+1}}$$

В случае знакопеременного ряда достаточно воспользоваться признаком сходимости Лейбница:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |S(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f^{(n)}(x)}{\omega^n} \right| = 0 \quad (4)$$

В случае знакопостоянного ряда удобнее воспользоваться сходимостью по остаточному члену R_n :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |R_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{\omega^n} \int_a^b f^{(n)}(x) e^{i\omega x} dx \right| = 0$$

Остаточный член можно оценить как:

$$|R_n| = \left| \frac{1}{\omega^n} \int_a^b f^{(n)}(x) e^{i\omega x} dx \right| \leq \left| \frac{1}{\omega^n} \right| \max_{x \in [a,b]} |f^{(n)}(x)| (b-a)$$

Поэтому достаточным условием сходимости является:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\max_{x \in [a,b]} |f^{(n)}(x)|}{|\omega^n|} = 0 \quad (5)$$

Можно сразу же отметить, что с возрастанием ω , скорость сходимости ряда возрастает, поэтому ряд (3) удобно применять для быстро осциллирующих функций с большой константой осцилляции.

При выполнении условий сходимости (4) или (5) интеграл (2) можно представить как бесконечный сходящийся ряд:

$$\int_a^b f(x) e^{i\omega x} dx = \left(e^{i\omega x} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{f^{(k)}(x)}{(i\omega)^{k+1}} \right) \Big|_a^b$$

Рассмотрим следующие два интеграла с найденными аналитическими значениями:

$$\begin{aligned} \int_0^5 e^{-x} \sin(x) dx &= \frac{1}{2} - \frac{\sin(5) + \cos(5)}{2e^5} \approx 0,50227 \\ \int_0^5 e^{-x} \sin(100x) dx &= \frac{1}{10001} \left(100 - \frac{\sin(500) + 100\cos(500)}{e^5} \right) \approx \\ &\approx 0,010059 \end{aligned}$$

Ряд для первого интеграла, очевидно, не будет сходиться, так как:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f^{(n)}(x)}{\omega^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-x}}{1^n} = e^{-x} \neq 0$$

Ряд для второго интеграла будет сходиться, так как выполняется признак сходимости:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\max_{x \in [a,b]} |f^{(n)}(x)|}{|\omega^n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\max_{x \in [0,5]} e^{-x}}{3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3^n} = 0$$

Проверим данное предположение с помощью частичных сумм ряда (3). Для этого можно написать простую программу, на любом языке программирования, поддерживающем работу с комплексными числами (в данном случае бы выбран язык Python). Продемонстрируем результаты в виде таблицы (в качестве I обозначено точное значение интеграла, а в качестве $\tilde{I}$ – значение, полученное с помощью ряда (3)). Округление проводится до 5 знаков после запятой.

n	$ I - \tilde{I} $	
	$\omega = 1$	$\omega = 100$
1	0.49581	6.90704e-07
3	0.49581	6.90704e-11
5	0.49581	6.90767e-15
9	0.49581	0

Полученные данные подтверждают теоретическое предположение о сходимости и расходимости рядов. При $\omega = 100$ и $n = 9$ погрешность настолько мала, что не учитывается компьютером.

Расходимость первого интеграла связана исключительно с константой осцилляции и не зависела от функции амплитуды $f(x)$. Тем не менее, условия (4) и (5) выполняются далеко не для всех элементарных функций $f(x)$. Например, для амплитуды $f(x) = \frac{1}{x}$:

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f^{(n)}(x)}{\omega^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n!}{\omega^n x^{n+1}} \right| \neq 0 \quad \forall x, \omega$$

Таким образом, для $f(x) = \frac{1}{x}$ ряд сходиться не будет. Однако, можно заметить, что с ростом x значение остаточного члена будет уменьшаться для данного n . В связи с этим необходимо рассмотреть интеграл вида:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_t^\infty f(x) e^{i\omega x} dx \quad (6)$$

Установим условия сходимости ряда (3) для интеграла (6):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_t^\infty f(x) e^{i\omega x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(e^{i\omega b} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{f^{(k)}(b)}{(i\omega)^{k+1}} \right) -$$

$$- \lim_{t \rightarrow \infty} \left(e^{i\omega t} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{f^{(k)}(t)}{(i\omega)^{k+1}} \right) + \frac{1}{(i\omega)^{n+1}} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\int_t^\infty f^{(n+1)}(x) e^{i\omega x} dx \right)$$

Отметим сразу, что для сходимости данного ряда необходимо условие:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{f^{(k)}(x)}{(i\omega)^{k+1}} = 0.$$

Иначе выражения $\lim_{b \rightarrow \infty} \left(e^{i\omega b} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{f^{(k)}(b)}{(i\omega)^{k+1}} \right)$ и $\lim_{t \rightarrow \infty} \left(e^{i\omega t} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{f^{(k)}(t)}{(i\omega)^{k+1}} \right)$ не имеют смысла. Для выполнения этого условия достаточно предположить:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |f^{(n)}(x)| = 0, \forall n \quad (7)$$

Из условия (7) вытекает, что значение остаточного члена стремится к 0:

$$\frac{1}{(i\omega)^{n+1}} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\int_t^\infty f^{(n+1)}(x) e^{i\omega x} dx \right) = 0.$$

Таким образом, интеграл (6) сходится вместе с его рядом (3) и является бесконечно малой величиной:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_t^\infty f(x) e^{i\omega x} dx = \lim_{\substack{b \rightarrow \infty \\ t \rightarrow \infty}} \left(e^{i\omega x} \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{f^{(k)}(x)}{(i\omega)^{k+1}} \Big|_t^b \right) = 0. \quad (8)$$

Из этого, в свою очередь, следует достаточно точное приближение интеграла (2) при достаточно больших пределах интегрирования. В этом случае речь идёт об асимптотическом ряде.

3. Численные эксперименты

Рассмотрим пример. Вычислим интегралы и занесём результаты в таблицу ($\tilde{I}_1$ и $\tilde{I}_2$ – значения ряда (3) для соответствующих интегралов), округление проводится до 5 знаков после запятой:

$$I_1 = \int_{10^6}^{10^7} \frac{\sin(x)}{x} dx$$

$$I_2 = \int_1^5 \frac{\sin(x)}{x} dx$$

n	$\tilde{I}_1$	$\tilde{I}_2$
1	1.02748e-06	0.48357
5	1.02748e-06	8.19438
10	1.02748e-06	3,22617e+5
30	1.02748e-06	7.59545e+30
50	1.02748e-06	5.18338e+62
100	1.02748e-06	—
200	1.02748e-06	—
400	1.02748e-06	—

Для данной амплитуды ($f(x) = \frac{1}{x}$) ряд (3) не является сходящимся. Однако, в силу очевидного выполнения условия (7), можно воспользоваться асимптотическим представлением (8). Так как у интеграла I_1 пределы интегрирования достаточно большие, то асимптотическое представление достаточно точно аппроксимирует данный интеграл, поэтому значения $\tilde{I}_1$ практически не отличаются друг от друга, вплоть, как минимум, до $n = 400$ (по крайней мере до 5 знаков после запятой). При этом, начиная с некоторого очень большого значения n , значения $\tilde{I}_1$ начнут быстро и неограниченно расти, как в случае со значениями $\tilde{I}_2$. Значения $\tilde{I}_2$ не обладают устойчивостью, как раз в силу очень маленьких пределов интегрирования. Начиная, как минимум с $n = 400$, компьютер не может вычислить $\tilde{I}_2$ в силу его очень большого значения.

Некоторые интегралы можно представить в виде (2). Например, интегралы вида:

$$\int_a^b f(x) e^{i\omega x^r} dx$$

Через замену:

$$x^r = y, x = y^{\frac{1}{r}}, dx = \frac{1}{r} y^{\frac{1}{r}-1} dy, a^r < y < b^r$$

$$\int_a^b f(x) e^{i\omega x^r} dx = \frac{1}{r} \int_{a^r}^{b^r} f(y^{\frac{1}{r}}) y^{\frac{1}{r}-1} e^{i\omega y} dy$$

Рассмотрим интеграл:

$$\int_{10}^{20} \sin(x^{10}) dx$$

Выполним замену:

$$y = x^{10}, dy = 10x^9 dx, dx = \frac{1}{10} y^{-\frac{9}{10}} dy, 10^{10} < y < 20^{10}$$

Получаем:

$$\int_{10}^{20} \sin(x^{10}) dx = \frac{1}{10} \int_{10^{10}}^{20^{10}} y^{-\frac{9}{10}} \sin(y) dy$$

В данном случае амплитудой является функция $f(y) = y^{-\frac{9}{10}}$, а константой осцилляции: $\omega = 1$.

Найдём производную $f^{(n)}(y)$:

$$f^{(n)}(y) = \left(y^{-\frac{9}{10}}\right)^n = (-1)^n y^{-\left(\frac{9}{10}+n\right)} \prod_{k=0}^n \left(\frac{9}{10} + k\right)$$

Очевидно, что:

$$\lim_{y \rightarrow \infty} |f^{(n)}(y)| = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(y^{-\left(\frac{9}{10}+n\right)} \prod_{k=0}^n \left(\frac{9}{10} + k\right) \right) = 0, \forall n$$

Значит, можно применить асимптотическую формулу (8). Путём расчётов на компьютере получаем ($n = 100$):

$$\int_{10^{10}}^{20^{10}} y^{-\frac{9}{10}} \sin(y) dy \approx 8,71169 \cdot 10^{-10}.$$

В итоге получаем:

$$\int_{10}^{20} \sin(x^{10}) dx \approx 8,71169 \cdot 10^{-11}.$$

Список литературы

1. Ильин А. М., Данилин А. Р. Асимптотические методы в анализе. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2009. 248 с.
2. Ловецкий К. П., Петров В. В. Интегрирование быстро осциллирующих функций // Вестник РУДН. Серия: Математика, Информатика, Физика. 2011. № 2. С. 92–97.

МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ФУНКЦИЙ

Артём Денисович Волынский

Пензенский государственный университет, Пенза, Россия
suvig_plus@mail.ru

Аннотация. Исследуются методы численного дифференцирования функций. Предлагаются результаты численных расчетов с использованием нескольких формул различного порядка точности.

Ключевые слова: численное дифференцирование, функция, производная

METHODS OF NUMERICAL DIFFERENTIATION OF FUNCTIONS

Artem D. Volynsky

Penza State University, Penza, Russia
suvig_plus@mail.ru

Abstract. Methods of numerical differentiation of functions are investigated. The results of numerical calculations using several formulas of different order of accuracy are proposed.

Keywords: numerical differentiation, function, derivative

В настоящей работе исследуются методы численного дифференцирования функций.

1. Обзор методов численного дифференцирования

1.1. Вычисление производных с использованием их разностных аналогов

Предположим, что функция f дифференцируема в окрестности точки x достаточное количество раз. Исходя из определения производной:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

можно получить две простейшие приближенные формулы [1]:

$$f'_x \approx \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \tag{1.1}$$

$$f'_x \approx \frac{f(x) - f(x - h)}{h} \tag{1.2}$$

где h — малый параметр (шаг).

Эти формулы часто называют правой и левой разностными производными. Оценка погрешностей данных формул производится по следующей формуле:

$$|x(x, h)| \leq \frac{1}{2} h M_2,$$

где $M_2 = \max |f''(\xi)|$,

где ξ – точка, принадлежащая промежутку $(x, x+h)$.

Таким образом, формулы левых и правых разностных производных имеют первый порядок точности.

Для вычисления второй производной данным методом применяется следующая формула [1,2]:

$$f'_x \approx \frac{f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)}{h^2} \quad (1.3)$$

Данную величину также называют второй разностной производной.

Для вычисления погрешности, воспользуемся соответствующим разложением по формуле Тейлора:

$$f(x \pm h) = f(x) + f'(x)h + \frac{h^2}{2} f''(x) \pm \frac{h^3}{6} f'''(x) + \frac{h^4}{24} f^{(4)}(x) \pm \dots$$

отсюда получаем:

$$r(x, h) \approx \frac{f^{(4)}(x) + f^{(4)}(x)}{24} h^2$$

Тогда для оценки погрешности можно использовать следующее неравенство

$$(x+a)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k a^{n-k}$$

$$|r(x, h)| \leq M_4 / 12 h^2,$$

$$M_4 = \max_{[x-h, x+h]} |f^{(4)}(x)|$$

Таким образом, вторая разностная производная имеет второй порядок точности.

Центральной разностной производной называется выражение

$$f''(x) \approx \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

Для определения его погрешности используют следующую формулу:

$$|r(x, h)| \leq 1/6 h M^3, M^3 = \max_{[x-h, x+h]} |f'''(x)|$$

Формула имеет вторую степень точности.

Таким образом, можно получить формулы любой точности, однако для этого нужно знать значения функции в большем количестве точек.

Например, формула, имеющая четвертый порядок, точности имеет следующий вид [2]:

$$f'(x) \approx \frac{f(x-2h) - 8f(x-h) + 8f(x+h) - f(x+2h)}{12h} \quad (1.4)$$

Данный способ удобен в тех случаях, когда точка совпадает с одним из заданных узлов, но вычислить производную точки, не принадлежащей узлам, не предоставляется возможным.

2. Численное дифференцирование, основанное на интерполяции алгебраическими многочленами

Предположим, что $f(x)$ в окрестности точки x аппроксимируется некоторой другой функцией $g(x)$, и производная $g'(x)$ легко вычисляется [2].

Тогда:

$$F^{(k)}(x) \approx g^{(k)}(x)$$

Пусть $P_n(x)$ – интерполяционный многочлен n -ой степени с узлами интерполяции $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$. В таком случае:

$$F^{(k)} \approx P_n^{(k)}(x), \quad 0 \leq k \leq n$$

Для получения интерполяционного многочлена применяется аппроксимация многочленом Лагранжа.

Для получения полинома Лагранжа используется следующая формула:

$$P(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + \dots + y_n l_n(x) = \sum_{k=0}^n y_k l_k(x)$$

где $l_0, l_1, \dots, l_n$ – многочлены, зависящие от $x_0, x_1, \dots, x_n$.

Фундаментальные многочлены здесь находятся по формуле:

$$l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

3. Обусловленность численного дифференцирования

Несмотря на внешнюю простоту формул численного дифференцирования, их применение требует особой осторожности [3]. Отметим, что используемые при численном дифференцировании значения функции не в узловых точках содержат ошибки. Поэтому к погрешности формул численного дифференцирования добавляется не устранимая погрешность, вызванная погрешностями вычисления функции. Для того, чтобы погрешность аппроксимации была достаточно малой, требуется очень маленькое значение шага h .

Однако, при малых шагах формулы численного дифференцирования становятся плохо обусловленными и результат их применения может быть полностью искажен неустранимой ошибкой.

В качестве примера рассмотрим формулу правой разностной производной.

Полная погрешность

$$r(x, h) = f'(x) - \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

представляет собой сумму погрешностей аппроксимации

$$r + (x, h) = f'(x) - \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

и неустранимой погрешности

$$r_h(x, h) = \frac{1}{h} \left((f(x+h) - f(x+h)) - (f(x) - f(x)) \right)$$

Пусть $\Delta = |f(x) - f^*(x)|$ – верхняя граница абсолютной погрешности. Тогда погрешность r_h оценивается следующим образом: $|r_h| \leq \frac{2\Delta}{h}$

Эта оценка означает, что чувствительность формулы к погрешностям входных данных характеризуется абсолютным числом обусловленности $\nu_\Delta = \frac{2}{h}$

Так как $\nu_\Delta \rightarrow \infty$ при $h \rightarrow 0$, то формула дифференцирования становится очень плохо обусловленной. Поэтому, несмотря на то что погрешность аппроксимации стремится к нулю, следует ожидать, что полная погрешность будет неограниченно возрастать. Во всяком случае так себя ведет верхняя граница полной погрешности

Таким образом, при использовании формул для вычисления производной функции f , заданной с погрешностью, следует обратить внимание на выбор шага. Однако даже при оптимальном выборе шага полная погрешность окажется величиной, пропорциональной лишь $\sqrt{\Delta}$ (для формулы правой разностной производной).

Формулы для вычисления производных высших порядков обладают еще большей чувствительностью к ошибкам задания функции. Поэтому значения производных высокого порядка с помощью данных методов, могут быть очень неточными.

Если сравнивать описанные способы численного дифференцирования, то можно заметить, что методы левой, центральной и правой разностей довольно просто реализуются, на их выполнение требуется меньше ресурсов и времени. Однако, дифференцирование с помощью замены функции интерполяционным многочленом позволяет узнать значения производной в точках, отличных от узловых, но этот метод имеет большие затраты времени. К тому же, при малых значениях шага h и увеличении кол-ва данных шагов значительно повышается погрешность, хотя и находится многочлен, который более приближен к функции.

4. Численные эксперименты

Для демонстрации работы представленных формул применим их к нескольким дифференцируемым функциям с известными аналитическими производными:

4.1. Функция: $x^2 e^{-x}$

	Погрешность	численного	дифференцирования:
Шаг:	(1.1)	(1.3)	(1.4)
0.1	0.0904837	0.0100167	6.68335e-05
0.05	0.0447171	0.00240266	4.04594e-06
0.025	0.021548	0.000576695	2.4526e-07
0.0125	0.0102431	0.000138414	1.48717e-08
0.00625	0.00483172	3.32132e-05	9.017e-10
0.003125	0.00226828	7.96741e-06	5.46803e-11
0.0015625	0.00106129	1.91069e-07	3.31463e-12
0.00078125	0.000495212	4.58062e-07	2.0578e-13
0.000390625	0.000230502	1.09777e-07	1.19349e-14
0.000195313	0.000107025	2.62998e-08	1.58762e-14
0.76563e-05	4.95653e-05	6.29851e-09	4.93494e-14

4.2. Функция: $\frac{\cos(4x)}{x^2+1}$

	Погрешность	численного	дифференцирования:
Шаг:	(1.1)	(1.3)	(1.4)
0.1	0.55058	0.0582715	0.000557972
0.05	0.275749	0.0127538	1.65625e-06
0.025	0.140126	0.00272827	1.60631e-06
0.0125	0.071587	0.000567603	1.95328e-07
0.00625	0.0365519	0.000113642	1.75967e-08
0.003125	0.0186007	2.14733e-05	1.40573e-09
0.0015625	0.00942353	3.6746e-06	1.05137e-10
0.00078125	0.00475146	5.07317e-07	7.48623e-12
0.000390625	0.00238436	2.74626e-08	2.76668e-13
0.000195313	0.00119096	1.70126e-08	6.24611e-13
0.76563e-05	0.000592193	9.96056e-09	5.46341e-13

4.3. Функция: $\ln(1 + \sqrt{x})$

	Погрешность	численного	дифференцирования:
Шаг:	(1.1)	(1.3)	(1.4)
0.1	0.0264818	0.00322557	0.000264878
0.05	0.0132688	0.000736444	1.31116e-05
0.025	0.00649638	0.000170367	7.03429e-07
0.0125	0.00314402	3.95932e-05	3.85193e-08
0.00625	0.00151356	9.22463e-06	2.12481e-09
0.003125	0.000727124	2.15342e-06	1.17693e-10
0.0015625	0.000349136	5.03586e-07	6.53327e-12
0.00078125	0.000167682	1.1796e-07	3.28126e-13
0.000390625	8.05811e-05	2.76739e-08	2.17659e-13
0.000195313	3.87525e-05	6.50181e-09	5.52447e-13
0.76563e-05	1.86513e-05	1.53062e-09	7.72382e-13

В представленных выше таблицах приведены результаты численных расчётов с использованием формул 1-го, 2-го и 4-го порядка точности при условии что значение функции вычислены без погрешностей. Как видим из предложенных результатов, точность аппроксимации производной зависит от величины шага h и соответствует теоретической оценке.

Список литературы

1. Бахвалов Н. С. Численные методы. М. : Наука, 2009. С. 190.
2. Рябенский В. С. Введение в вычислительную математику. М. : МФТИ, 1992. С. 193.
3. Амосов А. А., Дубинский Ю. А. Вычислительные методы для инженеров. М. : Высш. шк., 2014. С. 544.
4. Kincaid D., Cheney W. Numerical analysis: mathematics of scientific computing. California : Belmont, Wadsworth, Inc., 2011. P. 701.

ШИФР ЦЕЗАРЯ

*Мария Петровна Гарькаева¹,
Елена Геннадьевна Романова²*

^{1,2} Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

¹ garkaeva.garkaeva03@gmail.com

Аннотация. Шифр Цезаря является одним из самых простых и широко известных методов шифрования текста. Исследуется история и принцип работы этого шифра. Шифр Цезаря в своей основе использует сдвиг букв алфавита на определенное количество позиций. Анализируются различные подходы к декодированию сообщений, зашифрованных с его помощью. Также рассматриваются основные преимущества и недостатки шифра и применение метода в современном мире. Исследование позволяет лучше понять и оценить значимость этого классического метода шифрования.

Ключевые слова: шифр Цезаря, алфавит, шаг, номер буквы, шифрование, дешифрование, криптография

CAESAR'S CIPHER

Maria P. Garkaeva¹, Elena G. Romanova²

^{1,2} Penza State University, Penza, Russia

¹ garkaeva.garkaeva03@gmail.com

Abstract. The Caesar cipher is one of the simplest and most widely known methods of text encryption. This article explores the history and principle of operation of this cipher. The Caesar cipher basically uses the shift of the letters of the alphabet by a certain number of positions. Various approaches to decoding messages encrypted with this cipher are analyzed. The main advantages and disadvantages, and the application of the method in the modern world are also discussed. The study makes it possible to better understand and evaluate the significance of this classical encryption method.

Keywords: Caesar cipher, alphabet, step, letter number, encryption, decryption, cryptography

ВВЕДЕНИЕ

Шифр Цезаря – это один из самых простых и известных методов шифрования, который был первоначально использован в Древнем Риме. Этот шифр назван в честь Юлия Цезаря, который использовал его при общении со своими союзниками.

В современном мире шифр Цезаря не применяется в качестве основного метода шифрования для обеспечения безопасности данных. Однако, его концепции и идеи могут использоваться в некоторых образовательных программах, криптографических курсах и задачах по расшифровке.

Также, шифр Цезаря часто используется в различных играх и головоломках, чтобы предоставить игрокам задания, требующие расшифровки или создания зашифрованной коммуникации. Отсылки к шифру Цезаря также могут иногда появляться в средах массовой информации, фильмах и книгах, чтобы создать интерес и добавить атмосферу интриги.

Цель статьи заключается в познавательном и информативном представлении шифра Цезаря, его использовании и ограничениях, а также в контексте его роли в истории криптографии и развитии более сложных методов шифрования.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ШИФРА ЦЕЗАРЯ

1.1. Основная идея шифра Цезаря

Основная идея шифра Цезаря заключается в простом сдвиге каждой буквы в алфавите на определенное количество позиций. Это приводит к созданию зашифрованного текста, где каждая буква заменяется другой буквой из алфавита. Конкретное количество позиций сдвига называется ключом шифра.

Например, при использовании ключа 3 (обычно сдвиг вправо), буква «А» заменится на «D», «В» на «Е», «С» на «F» и так далее (рис. 1). Такой сдвиг происходит с каждой буквой в сообщении, что приводит к созданию зашифрованного текста.

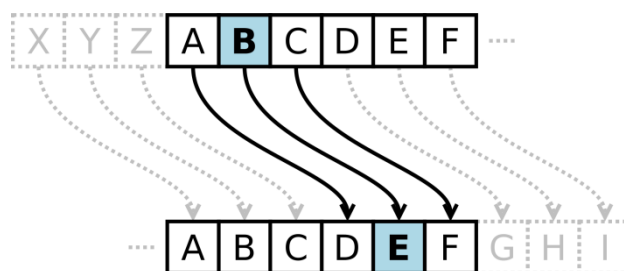


Рис. 1. Пример шифра Цезаря

Для расшифровки сообщения необходимо сделать обратный сдвиг на ту же самую позицию влево. То есть, если текст был зашифрован с использованием ключа 3, чтобы его расшифровать, нужно сдвинуть каждую букву в сообщении на три позиции влево [1].

1.2. Постановка задачи шифра Цезаря

Шифр Цезаря очень прост в использовании и понимании. Он основан на сдвиге букв алфавита влево или вправо на определенное

количество позиций. Также данный шифр хорошо работает для шифрования простой информации, такой как имена, фразы или тексты, не содержащие сложной структуры или специальных символов. Это делает шифр полезным для шифрования конфиденциальной информации повседневного характера. На основе шифра Цезаря были созданы шифр Виженера и шифр Гронсфельда.

Однако, из-за своей простоты шифр Цезаря не обладает высоким уровнем безопасности, так как его можно легко взломать путем простого анализа частотности букв. Также шифру присуща ограниченность в выборе ключа, который определяет количество позиций сдвига.

Рассмотрим следующую задачу: задана строчка «на улице осень и теперь постоянно льет дождь». С помощью шифра Цезаря зашифровать строчку с ключом 4, после повторно зашифровать полученную строчку с ключом 7.

Для шифрования текста была использована формула шифра Цезаря:

$$C = P + K [2],$$

где P – номер символа открытого текста; C – номер символа шифрования; K – ключ (шаг) шифрования.

Для буквы «Н» формула выглядит следующим образом:

$$14 + 4 = 17$$

Под 17 номером в русском алфавите стоит буква «С».

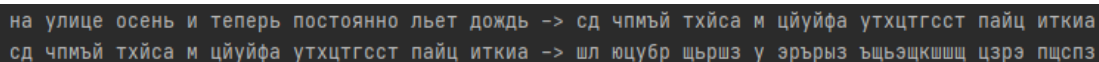
Для буквы «А» формула выглядит:

$$1 + 4 = 5$$

Под 5 номером в русском алфавите стоит буква «Д».

Данная формула применяется для всех букв в заданной строчке.

Ответ задачи представлен на рис. 2. Сперва была зашифрована исходная фраза, после полученное предложение также было зашифровано, но с другим ключом.



```
на улице осень и теперь постоянно льет дождь -> сд чпмъй тхйса м цйуйфа утхцтгссст пайц итkia
сд чпмъй тхйса м цйуйфа утхцтгссст пайц итkia -> шл юцубр щършз у эрърыз ъщъэщкшщ цзрэ пщспз
```

Рис. 2. Ответ задачи

2. ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

В качестве языка программирования для применения шифра Цезаря был выбран язык Java. Java – строго типизированный объектно-ориентированный язык программирования, разработанный компанией Sun Microsystems (в следующем приобретённой компанией Oracle). Приложения Java обычно транслируются в специальный байт-код, поэтому они могут работать на любой компьютерной архитектуре, для которой существует реализация виртуальной Java-машины.

В качестве среды разработки использовалась IntelliJ IDEA – в ней писался код программы, проводилась отладка и тестирование. Это интегрированная среда разработки Java приложений от компании Jet Brains.

Редактор кода в IntelliJ IDEA – один из самых мощных в индустрии. Благодаря начальной индексации он понимает все нюансы кода и обнаруживает ошибки по мере ввода, предлагает варианты автодополнения с учетом контекста, выполняет безопасный рефакторинг и предоставляет много других полезных функций [3].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в данной работе был рассмотрен шифр Цезаря, его использование и ограничения, его роль в истории криптографии и развитии более сложных методов шифрования.

Шифр Цезаря – это исторический пример шифрования, который до сих пор интересен и используется в различных сферах жизни. Он служит примером простого метода шифрования, основанного на математических операциях.

Список литературы

1. Криптографическая защита информации. URL: <http://studylib.ru/doc/2736824/>
2. Шифрование методом замены (подстановки). URL: https://studopedia.ru/11_46236_shifrovanie-metodom-zameni-podstanovki.html
3. Основные возможности среды разработки IntelliJ Idea. URL: <https://www.jetbrains.com/ru-ru/idea/features/>

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

*Александр Михайлович Дроздов¹,
Татьяна Вячеславовна Черушева²*

^{1,2} Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

¹ alexandrdrozdov1el91@gmail.com, ² tank1100@yandex.ru

Аннотация. Рассмотрены области применения кривых второго порядка в различных сферах. Приведены примеры их использования.

Ключевые слова: кривые второго порядка, эллипс, гипербола, парабола, практическое применение

USING SECOND-ORDER CURVES

Alexander M. Drozdov¹, Tatyana V. Cherusheva²

^{1,2} Penza State University, Penza, Russia

¹ alexandrdrozdov1el91@gmail.com, ² tank1100@yandex.ru

Abstract. The areas of application of second-order curves in various spheres are considered, examples of use are given.

Keywords: second order curves, ellipse, hyperbola, parabola, practical application

История изучения кривых второго порядка

История изучения кривых второго порядка уходит своими корнями в древние времена. Однако систематическое и научное изучение этих кривых началось только в эпоху Возрождения. Линии второго порядка появились как сечения конических поверхностей. Одним из первых, кто начал изучать конические сечения (эллипс, парабола, гипербола), был ученик знаменитого Платона, древнегреческий математик Менехм (IV в. до н.э.) [5]. Решая задачу об удвоении куба, Менехм задумался: «*А что случится, если разрезать конус плоскостью, перпендикулярной его образующей?*». Так, изменяя угол при вершине прямого кругового конуса, Менехм получил три вида кривых: эллипс – если угол при вершине конуса острый; парабола – если угол прямой; одну ветвь гиперболы – если угол тупой.

Название этих кривых придумал не Менехм. Их предложил один из крупнейших геометров древности Аполлоний Пергский, посвятивший замечательным кривым трактат из восьми книг «Конические сечения» («О кониках»). Это – трактат об эллипсе, параболе и гиперболе, определяемых как сечения кругового конуса, где изложение доведено до исследования конического сечения.

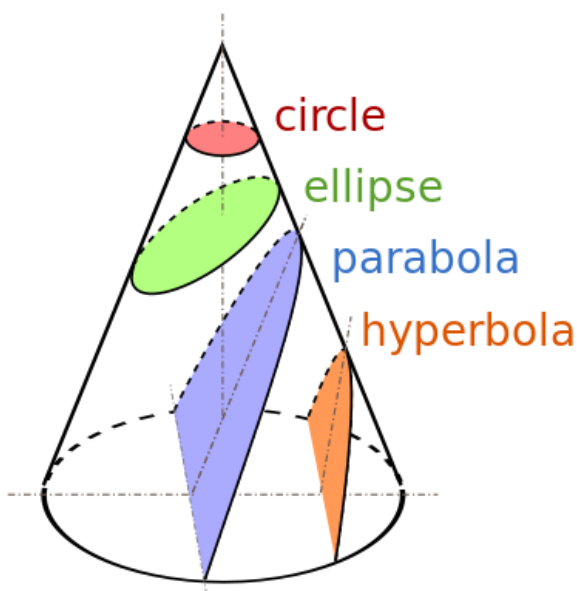


Рис. 1. Разрез конуса

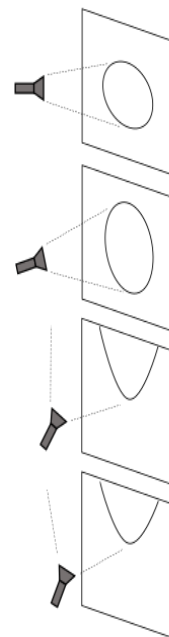


Рис. 2. Падение света
в зависимости от угла наклона

В средние века изучение кривых второго порядка было забыто, но в эпоху Возрождения оно было возрождено благодаря работам таких ученых, как Рене Декарт и Пьер Ферма. Декарт разработал систему координат, которая позволила геометрически описывать кривые второго порядка. Ферма же внес значительный вклад в изучение эллипсов и парабол.

В XVII и XVIII вв. изучение кривых второго порядка стало одной из основных задач математического анализа. Ученые, такие как Исаак Ньютон и Готфрид Лейбниц, разработали методы дифференциального исчисления, которые позволили более глубоко изучать кривые второго порядка.

В XIX в. исследования кривых второго порядка стали связаны с алгеброй. Одним из наиболее известных ученых, занимавшихся этой темой, был Карл Фридрих Гаусс. Он разработал теорию алгебраических кривых, которая стала основой для многих последующих исследований.

С появлением компьютеров и развитием математического программного обеспечения в XX в. изучение кривых второго порядка стало еще более доступным и широко применяемым. Современные методы анализа и моделирования позволяют изучать и использовать кривые второго порядка в различных областях науки и техники, таких как физика, инженерия и компьютерная графика.

Приведём уравнения эллипса, гиперболы и параболы [1] и сами кривые.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$y^2 = 2px, p > 0$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

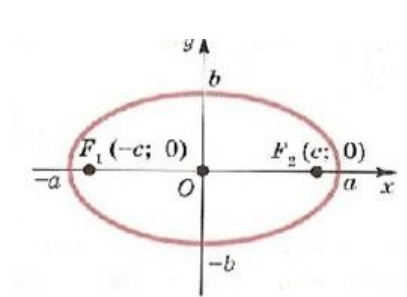


Рис. 3. Эллипс

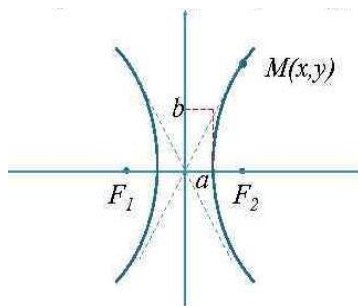


Рис. 4. Гипербола

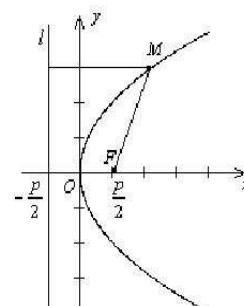


Рис. 5. Парабола

Практическое применение кривых второго порядка

В аналитической геометрии на плоскости подробно изучаются геометрические свойства эллипса, гиперболы и параболы, представляющих собой линии пересечения кругового конуса с плоскостями, не проходящими через его вершину. Эти линии часто встречаются во многих задачах естествознания и техники.

Например, эллипсы имеют важное применение в машиностроении и технике, ввиду удобной формы, способной эффективно распределять вес и повышать износостойкость [2]. На производстве в некоторых механизмах применяются «эллиптические зубчатки» (рис. 6).

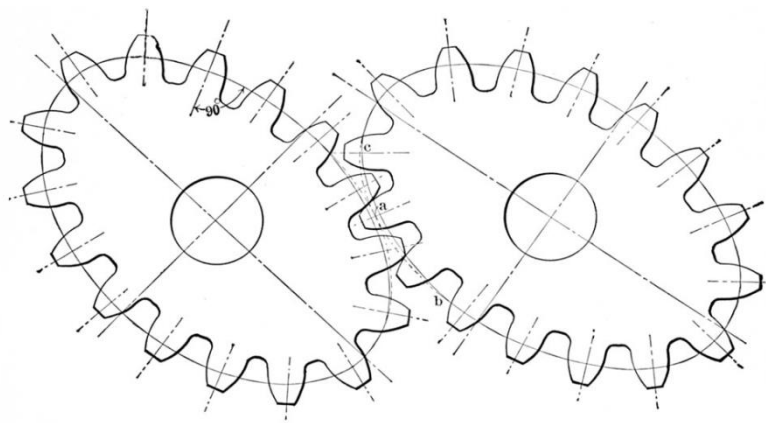


Рис. 6. Эллиптические зубчатки

Помимо этого, в астрономии при описании планет и спутников вокруг своих центральных тел используют именно эллипсы (рис. 7) [3].

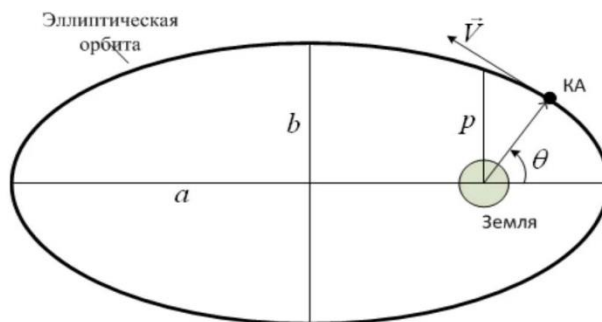


Рис. 7. Эллиптическая орбита

Движение материальной точки под воздействием центрального поля силы тяжести происходит по одной из этих линий; в инженерном деле для конструирования прожекторов, антенн и телескопов пользуются важным оптическим свойством параболы, заключающимся в том, что лучи света, исходящие из определённой точки (фокуса параболы), после отражения от параболы образуют параллельный пучок (рис. 8, 9).

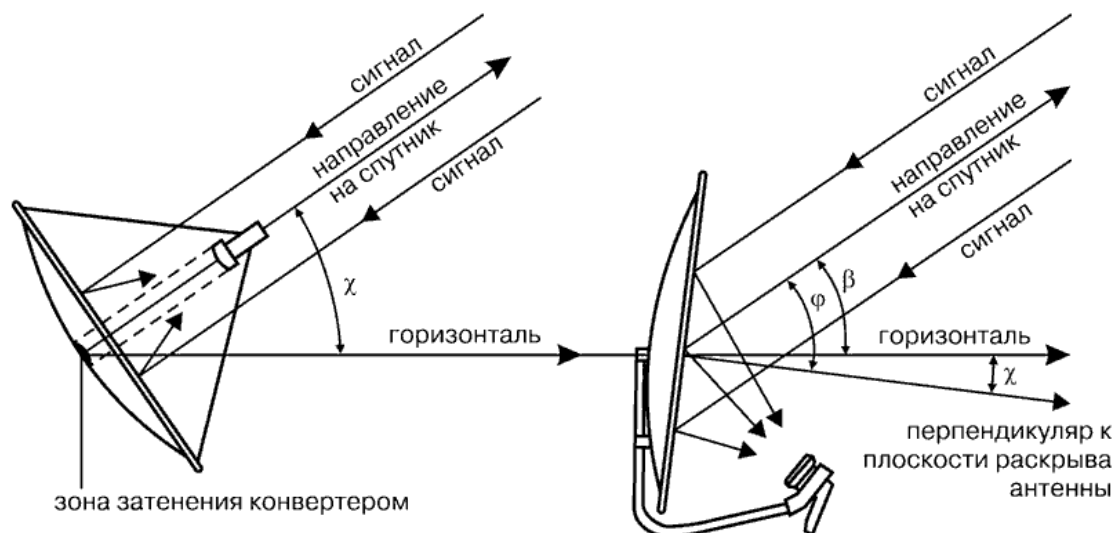


Рис. 8. Принцип работы антенн

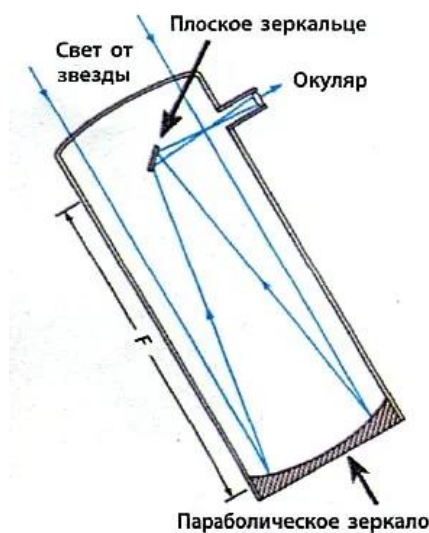


Рис. 9. Принцип работы телескопа

Часто две величины бывают связаны между собой обратно пропорциональной зависимостью (например, точечный заряд создаёт гиперболические линии сил вокруг себя). Графиком такой функциональной зависимости является гипербола: $E = \frac{kq}{\epsilon r^2}$ и $\phi = \frac{kq}{\epsilon r}$ (рис. 10).

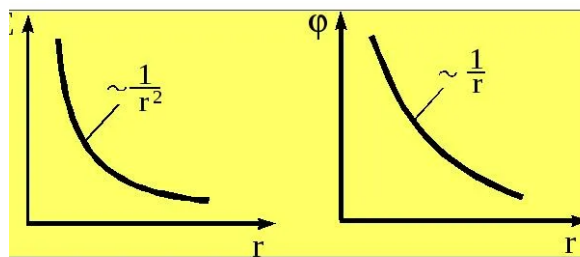


Рис. 10. График зависимости точечного заряда

Гиперболы также применяются в системах гиперболической навигации (HNS, Logan и т.п.) (рис. 11).

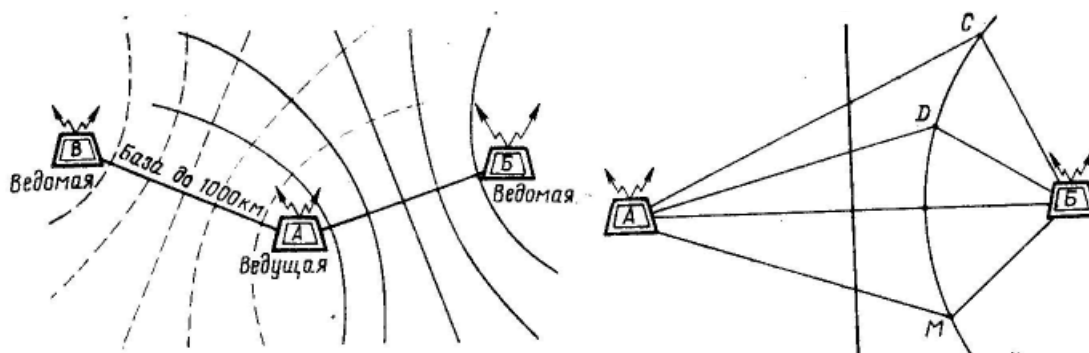


Рис. 11. Принцип работы гиперболической навигации

Таким образом, изучение кривых второго порядка является долгим и интересным процессом, который привел к развитию математической науки и нашему более глубокому пониманию и использованию этих кривых.

Список литературы

1. Александров А. Д., Нецветаев Н. Ю. Кривые второго порядка // Геометрия. М. : Наука, 1990. Гл. II.
2. Фелл Д., Бристо М. О. Применение конических элементов в машиностроении. СПб. : Первая Книга, 2016.
3. Савченко В. В., Савченко А. В. Применение конических сечений в физике: зеркала, линзы и орбиты. Смоленск : Печатный центр Смоленского государственного университета, 2018.

ПРИМЕНЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ К РЕШЕНИЮ ФИЗИЧЕСКИХ ЗАДАЧ НА ТЕПЛООБМЕН

Алексей Михайлович Кондратьев

Пензенский государственный университет, Пенза, Россия
xdresherx@mail.ru

Аннотация. Исследуется применение дифференциальных уравнений в физических задачах на теплообмен.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, теплообмен, физические задачи, производная

APPLICATION OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS TO SOLVING PHYSICAL PROBLEMS ON HEAT EXCHANGE

Alexey M. Kondratiev

Penza State University, Penza, Russia
xdresherx@mail.ru

Abstract. The application of differential equations in physical problems for motion is investigated.

Keywords: differential equations, heat exchange, physical problems, derivative

При взаимодействии двух объектов с разными температурами происходит передача энергии от движения их структурных частиц (молекул, атомов, свободных электронов). Как результат, интенсивность движения частиц в объекте с более низкой температурой увеличивается, а в объекте с более высокой температурой – уменьшается. В итоге, один объект нагревается, а другой охлаждается [1, 2].

Этот перенос энергии от горячего объекта к холодному называется тепловым потоком. Для возникновения теплового потока, то есть процесса теплообмена между разными областями пространства, необходимо и достаточно, чтобы в этих областях были разные температуры. При этом направление теплового потока всегда идет от более высокой температуры к более низкой.

Наряду с рассмотренным случаем теплообмена непосредственно в вещественной среде из-за движения структурных частиц, также имеет место передача тепла через излучение (например, в космических процессах). Поэтому следует различать прямой теплообмен при контакте

объектов и излучательный теплообмен, когда энергия передается от одного объекта к другому посредством электромагнитного поля. В конечном итоге, передача тепла всегда связана с движением структурных частиц. Однако прямая передача определенных порций теплоты из одной области в другую может происходить не только через последовательный обмен энергией частиц, заполняющих пространство между объектами, но и благодаря перемещению большого количества молекул, составляющих среду.

Процесс передачи тепла только благодаря движению структурных частиц среды называется теплопроводностью, а процесс передачи, вызванный перемещением объемов среды, называется конвекцией.

Следовательно, существует три способа передачи тепла: теплопроводность, конвекция и излучение. В реальных процессах все эти три способа теплообмена обычно сочетаются и часто связаны с переносом массы (диффузией), то есть имеет место сложный тепло- и массообмен.

В теории теплоотдачи расчет сложного теплообмена осуществляется с помощью методов, обобщающих результаты раздельного изучения каждого из трех первичных способов переноса тепла. Следовательно, основным методом теории теплопередачи является расчленение сложного теплообмена на его составляющие по способу (механизму) переноса тепла и изучение этих составляющих методами математической физики и научного опыта.

Практически, большинство процессов, рассматриваемых теорией теплообмена, протекает при взаимодействии твердых и жидких сред в областях, размеры которых чрезвычайно велики по сравнению с длиной свободного пробега атомов и молекул. Так, в объеме газа равном 10^{-3} мм^3 при давлении $9,8 \cdot 10^4 \text{ Па}$ и температуре 273 К содержится примерно 10^6 молекул. Поэтому такие статистические понятия, как температура, давление, теплоемкость, вязкость и т.п. могут быть приписаны даже таким малым элементам системы, которые с физико-математической точки зрения могут рассматриваться в данном случае как дифференциалы ее объема.

Это означает, что в большинстве проблем теплообмена твердые и жидкие среды, составляющие систему, рассматриваются как непрерывные. Исключение приходится делать только для взаимодействия тел с весьма разреженным газом, когда размеры тела становятся соизмеримыми с длиной свободного пробега молекул.

Одним из методов изучения теплообмена является использование обыкновенных дифференциальных уравнений. Обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ) представляют собой математические модели, описывающие тепловые процессы и их изменение во времени. Дифференциальные уравнения позволяют получить аналитические или численные решения, которые могут быть использованы для определения

температурных полей в системах теплообмена, расчета энергетического баланса и оценки влияния различных параметров на процесс.

Схема решения физических задач:

Решение физических задач на составление дифференциальных уравнений распадается на три этапа:

1. Составление уравнения.
2. Нахождения уравнения
3. Нахождение ответа на поставленные вопросы (исследование решения)

Рекомендуется следующая последовательность решения:

1. Установить величины, изменяющиеся в данном явлении.
2. Выбрать независимую переменную и функцию этой переменной, которую мы хотим найти.
3. Установить законы, связывающие эти переменные.
4. Исходя из условий задачи, определить начальные условия и выделить дополнительные данные.
5. Выразить все фигурирующие в задаче величины через независимую переменную, функцию этой переменной и ее производную.
6. Исходя из условия задачи и физического закона, составить уравнение.
7. Найти общее решение уравнения.
8. Исходя из условий задачи, найти частное решение и ответы на поставленные вопросы.

Рассмотрим несколько подобных задач и попробуем решить, используя данный алгоритм [3]:

Задача 1. За какое время тело, нагретое до 100 градусов, в комнате с температурой 20 градусов охладится до 25 градусов, если до 60 градусов оно охладилось за 20 мин?

В условии задачи переменными являются время и температура тела.

При этом время t – независимая переменная (в часах), а температура $T(t)$ °C – функция (в градусах Цельсия).

Используем физический закон: скорость охлаждения тела пропорциональна разности температур тела и среды.

Выделим начальные условия: при $t_0 = 0$ мин температура тела $T_0 = 100$ °C. Для нахождения коэффициента пропорциональности даны дополнительные условия $t_1 = 20$ мин $T_1 = 60$ °C. Вопрос задачи: найти время t_2 , если $T_2 = 25$ °C.

Исходя из физического смысла производной, скорость изменения температуры есть производная от температуры тела по времени: $\frac{dT}{dt}$

По физическому закону запишем уравнение:

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 20)$$

Найдем общее решение:

$$\int \frac{dT}{T-20} = \int k dt,$$

$$\ln(T + 20) = kt + C$$

$$T - 20 = Ce^{kt} - \text{общее решение.}$$

$$T = 20 + Ce^{kt}.$$

Подставим начальные условия:

$$100 = 20 + Ce^{k \cdot 0},$$

откуда

$$C = 80.$$

Запишем частное решение: $T = 20 + Ce^{kt}$

Для нахождения коэффициента k подставим дополнительные данные:

$$60 = 20 + 80e^{20k}, e^{20k} = \frac{1}{2}, 20k = -\ln 2, k = -\frac{\ln 2}{20},$$

Тогда решение уравнения запишется в виде:

$$T = 20 + 80e^{\wedge\left(\frac{t \ln 2}{20}\right)}.$$

Найдем t при условии $T = 25$.

$$25 = 20 + 80e^{\wedge\left(\frac{t \ln 2}{20}\right)}, e^{\wedge\left(\frac{t \ln 2}{20}\right)} = \frac{1}{16}$$

$$-\frac{t \ln 2}{20} = -4 \ln 2, t = 80 \text{ мин.}$$

З а д а ч а 2. Кусок металла (сталь) с температурой a градусов помещен в печь, температура которой равномерно повышается в течение часа от a до b градусов. Найти температуру тела через час.

Пусть t – время, независимая переменная, $T(t)$ – температура тела в момент времени t , $\theta(t)$ – температура печи в момент времени t .

Начальные условия:

$$t = 0$$

$$T_0 = a$$

$$\theta_0 = a$$

Дополнительные условия:

$$\theta(t) = a + \lambda t$$

где λ – коэффициент

пропорциональности

Вопрос задачи:

$$t_1 = 60 \text{ мин}$$

$$T_1 = ?$$

Закон: скорость нагревания тела пропорциональна разности температур среды и тела, т.е.

$$\frac{dT}{dt} = k(\theta - T).$$

При заданных условиях уравнение выглядит так:

$$\frac{dT}{dt} = k(a + \lambda t - T),$$

$T' = ka + \lambda kt - kT$, $T' + kT = ka + \lambda kt$ – линейное уравнение,

$$T = uv, T' = u'v + uv',$$

$$u'v + uv' + kuv = ka + \lambda kt,$$

$$u'v + u(v' + kv) = ka + \lambda kt,$$

$$v' + kv = 0, \frac{dv}{v} = -kt, \ln |v| = kt, v = e^{-kt},$$

$$u'e^{-kt} = ka + \lambda kt,$$

$$du = (ka + \lambda kt) e^{kt} dt,$$

$$u = \int (ka + \lambda kt) e^{kt} dt.$$

$$\int (ka + \lambda kt) e^{kt} dt = \left| \begin{array}{l} u = ka + \lambda kt \\ du = \lambda k dt \\ dv = e^{kt} dt \\ v = \frac{1}{k} e^{kt} \end{array} \right| =$$

$$= (ka + \lambda kt) \frac{1}{k} e^{kt} - \frac{\lambda}{k} \int e^{kt} dt = (a + \lambda t) e^{kt} - \frac{\lambda}{k} e^{kt} + C.$$

$$T = (a + \lambda t) - \frac{\lambda}{k} + Ce^{-kt} - \text{общее решение.}$$

$$\text{При } t_0 = 0, T_0 = a : a = a - \frac{\lambda}{k} + C, C = \frac{\lambda}{k}.$$

$$T = (a + \lambda t) - \frac{\lambda}{k} + \frac{\lambda}{k} e^{-kt} - \text{частное решение.}$$

$$T = a + \frac{b-a}{60} * 60 - \frac{b-a}{60k} * (1 - e^{-60k}),$$

$$T = b - \frac{b-a}{60k} * (1 - e^{-60k}).$$

Для стали $k = 0,46$.

Список литературы

1. Левшина Е. С., Новицкий П. В. Электрические измерения физических величин. Л. : Энергоатомиздат, 1983. 320 с.
2. Ландсберг Г. С. Элементарный учебник физики. М. : Наука, 1966. 575 с.
3. Аксененко Е. М., Чуванова Г. М. Применение дифференциальных уравнений к решению задач. Южно-Сахалинск : Изд-во СахГУ, 2013. 51 с.

ИСКУССТВЕННЫЙ ИНТЕЛЛЕКТ И НЕЙРОМАТЕМАТИКА: СОВРЕМЕННЫЕ ДОСТИЖЕНИЯ И ПЕРСПЕКТИВЫ

*Наталья Васильевна Зверовщикова¹, Ирина Михайловна Мойко²,
Екатерина Александровна Косолапова³*

^{1,2,3} Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

¹nvz.matematika@yandex.ru, ²irmojko@yandex.ru,

³kosolapovaketrin@yandex.ru

Аннотация. Посвящена современным достижениям и перспективам в области искусственного интеллекта и нейроматематики. Рассматриваются основные принципы работы искусственного интеллекта, его применение в различных областях, а также перспективы развития данной технологии. Особое внимание уделяется нейроматематике – науке, объединяющей методы искусственного интеллекта и нейробиологии, – и ее роли в развитии новых методов и технологий. Приводятся примеры ранее недоступного человеку применения искусственного интеллекта к решению сложных задач.

Ключевые слова: искусственный интеллект, нейроматематика, машинное обучение, нейронные сети

ARTIFICIAL INTELLIGENCE AND NEUROMATHEMATICS: MODERN ACHIEVEMENTS AND PROSPECTS

*Natalia V. Zverovshchikova¹, Irina M. Moiko²,
Ekaterina A. Kosolapova³*

^{1,2,3} Penza State University, Penza, Russia

¹nvz.matematika@yandex.ru, ²irmojko@yandex.ru,

³kosolapovaketrin@yandex.ru

Abstract. The article is devoted to modern achievements and prospects in the field of artificial intelligence and neuromathematics. The basic principles of artificial intelligence, its application in various fields, as well as the prospects for the development of this technology are considered. Particular attention is paid to neuromathematics – a science that combines methods of artificial intelligence and neurobiology, and its role in the development of new methods and technologies. Examples are given of the use of AI to solve complex problems that were previously inaccessible to humans.

Keywords: artificial intelligence, neuromathematics, machine learning, neural networks

Введение

Современный мир невозможно представить без искусственного интеллекта (ИИ) и нейроматематики (НМ). Эти две области знаний

имеют глубокие взаимосвязи и сегодня являются ключевыми для развития многих технологий, от компьютерных игр до автономных автомобилей и роботов. Актуальность этих областей можно объяснить несколькими факторами:

- Большие объемы данных: В настоящее время собирается огромное количество данных, и нейроматематика помогает анализировать и использовать эти данные для обучения и улучшения ИИ-систем.

- Машинное обучение и глубокое обучение: нейроматематика предоставляет математические модели и алгоритмы, необходимые для обучения нейронных сетей и создания сложных ИИ-моделей.

- Распознавание образов: ИИ, основанный на нейроматематике, может эффективно обрабатывать и анализировать изображения, звуки и другие визуальные и аудиальные данные, что имеет огромное значение в таких областях, как компьютерное зрение и речевое распознавание.

- Принятие решений: ИИ, обученный с использованием нейроматематики и методов машинного обучения, способен анализировать сложные данные и принимать решения на основе этого анализа. Это может быть полезно в различных областях, от медицины до финансов.

Перспективы развития этих областей также впечатляющи. Прогресс в направлениях, таких как расширенный и дополненный ИИ, обучение с подкреплением и автономные системы, позволяет представлять будущие достижения в области искусственного интеллекта и нейроматематики [1–3].

Основные математические концепции, связанные с нейроматематикой

Теория графов и сетей. Теория графов играет важную роль в моделировании связей и взаимодействий в мозге через сети нейронов [4, 5]. Вот несколько способов, которыми теория графов применяется в этой области:

- Графы синапсов. Мозг состоит из огромного количества нейронов, которые обмениваются информацией через связи, называемые синапсами. Теория графов используется для моделирования этих связей и анализа структуры и функциональности сетей синапсов. Графы могут помочь исследователям понять, как сигналы распространяются и обрабатываются в нейронных сетях.

- Сети нейронов. Нейроны в мозге образуют сложные сети, которые ответственны за различные функции и процессы мышления. Теория графов позволяет моделировать эти сети как направленные или ненаправленные графы, где узлы представляют нейроны, а ребра – связи между ними. Анализ таких графов может помочь исследователям понять структуру сетей нейронов и их влияние на обработку информации в мозге.

– Функциональная коннективность. Теория графов может быть также применена для изучения функциональной коннективности между различными областями мозга. Путем анализа графа соединений между активными областями мозга, исследователи могут лучше понять сетевую динамику и взаимодействия между различными функциональными модулями мозга.

Таким образом, теория графов предоставляет математические инструменты и моделирование для изучения сложных взаимосвязей между нейронами и мозговыми сетями. Это помогает исследователям лучше понять структуру и функционирование мозга, а также может иметь важные практические применения в области нейробиологии и нейротехнологий.

Понимание понятий узлов, ребер и весов может быть полезным при работе с графами, которые могут использоваться в нейроматематических исследованиях. В графах узлы представляют собой точки, а ребра – связи между этими точками. Веса могут быть присвоены ребрам, чтобы указать на степень важности или силы связи между узлами. В нейроматематических исследованиях графы могут использоваться для моделирования связей между нейронами в мозге или для анализа социальных сетей.

Дифференциальные уравнения. Дифференциальные уравнения играют важную роль в моделировании динамики нейронных сетей, так как они позволяют описать изменение потенциала мембраны нейрона во времени. Моделирование динамики нейронных сетей может помочь в понимании, как мозг обрабатывает информацию и какие механизмы лежат в основе различных психических процессов. Дифференциальные уравнения могут использоваться для описания различных аспектов динамики нейронных сетей, таких как генерация спайков, синаптические связи и пластичность. Они могут быть также использованы для моделирования электрической активности мозга, такой как электроэнцефалограмма (ЭЭГ) и магнитоэнцефалограмма (МЭГ), что позволяет исследовать функциональную организацию мозга и выявлять возможные нарушения в его работе. Для анализа активности мозга используются различные математические модели и уравнения. Вот некоторые примеры уравнений, используемых в нейронауке и нейроматематике:

– Уравнение Годунова-Бернсайда. Это дифференциальное уравнение, которое описывает динамику мембранного потенциала нейрона. Оно было предложено в 1959 году Александром Годуновым и Робертом Бернсайдом. Уравнение описывает изменение мембранного потенциала во времени под воздействием различных ионных токов и внешнего тока. Оно может быть использовано для моделирования различных типов нейронов и их динамики, в том числе для изучения генерации спайков и синаптической пластичности.

– Уравнения Ходжкин-Хаксли для моделирования действительных потенциалов. Эти уравнения описывают мембранный потенциал нейрона и активацию ионных каналов. Это набор нелинейных дифференциальных уравнений, которые аппроксимируют электрические характеристики возбудимых клеток, таких как нейроны и сердечные миоциты. Это непрерывная динамическая система [4]: $\dot{V}_m = -\frac{1}{C_m} \left(\sum_i I_i \right)$,

где I_i означает величину электрического тока, который генерируется отдельным видом ионов; V_m – мембранный потенциал клеточной мембраны; C_m – электроёмкость, соответствующая липидному слою клеточной мембраны [4,5].

– Уравнение Больцмана для кинетики каналов. Это уравнение описывает вероятность открытия или закрытия ионных каналов в мембране нейрона

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{p}{m} + \frac{\partial f}{\partial p} \cdot F = \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{coll},$$

$F(x, t)$ – поле сил действующее на частицы в жидкости или газе; m – масса частицы; x – координата; p – импульс; t – время. Оно используется для моделирования стохастической активации ионных каналов.

Это лишь несколько примеров математических уравнений, применяемых в исследованиях активности мозга. Они позволяют ученым моделировать и понимать сложные процессы, происходящие в нейронах и мозговых сетях.

Фракталы. Фракталы и понятие самоподобия используются в нейрофизиологии и математическом моделировании мозга для анализа его структуры и организации. Мозг имеет иерархическую структуру, где каждый уровень состоит из более мелких подуровней, которые имеют сходство с более крупными уровнями. Это свойство называется самоподобие. Использование фракталов при анализе мозга позволяет выявить его самоподобную структуру и определить характеристики каждого уровня. Например, можно оценить количество нейронов и связей между ними на каждом уровне иерархии. Понятие самоподобия также используется при создании математических моделей мозга. Моделирование мозга – это процесс создания компьютерных моделей, которые имитируют работу мозга. Использование понятия самоподобия позволяет создать модели, которые точно отражают структуру и организацию мозга. Таким образом, использование фракталов и понятия самоподобия при анализе мозга и создании его математических моделей является важным инструментом для изучения структуры и функционирования мозга, а также для разработки новых методов диагностики и лечения нервных заболеваний.

Симбиоз ИИ и математики

Искусственный интеллект играет важную роль в развитии математических исследований. Он позволяет решать сложные задачи, которые ранее были недоступны для решения человеком. Вот некоторые примеры.

– Разработка алгоритмов машинного обучения. ИИ может использоваться для создания алгоритмов машинного обучения, которые позволяют находить скрытые закономерности в данных и создавать более точные модели. Например, ИИ может использоваться для создания алгоритмов классификации, которые могут определить, какие элементы данных относятся к какой категории, или алгоритмов регрессии, которые могут предсказывать будущие значения на основе исторических данных.

– Использование нейронных сетей. Нейронные сети – это один из наиболее распространенных методов глубокого обучения, который использует ИИ для решения сложных задач оптимизации и поиска оптимальных решений. Например, нейронные сети могут использоваться для распознавания образов, анализа текста или обработки звука.

– Создание экспертных систем. Экспертные системы – это компьютерные программы, которые используют ИИ для автоматизации процесса принятия решений в различных областях. Например, экспертные системы могут использоваться в медицине для диагностики заболеваний или в финансах для принятия решений о вложении капитала.

– Разработка алгоритмов глубокого обучения. Алгоритмы глубокого обучения – это методы машинного обучения, которые используют ИИ для создания более эффективных моделей для прогнозирования поведения систем и процессов. Например, алгоритмы глубокого обучения могут использоваться для анализа финансовых рынков или для прогнозирования погоды.

– Анализ больших объемов данных. ИИ может использоваться для анализа больших объемов данных и выявления скрытых закономерностей, что позволяет улучшить качество принимаемых решений и повысить эффективность процессов. Например, ИИ может использоваться для анализа данных о продажах, чтобы определить, какие товары наиболее популярны, или для анализа данных о клиентах, чтобы определить, какие продукты и услуги наиболее интересны им.

Заключение

Совместное исследование нейроматематики и искусственного интеллекта имеет огромное значение в нашем современном мире. Обе эти области знаний взаимосвязаны и укрепляют друг друга. Это позволяет достичь более глубокого понимания принципов работы мозга и создания эффективных алгоритмов искусственного интеллекта.

Нейроматематика исследует математические модели, которые описывают функционирование нервной системы. Она помогает лучше понять структуру и процессы, лежащие в основе работы мозга. Это важно для разработки новых методов и технологий в области искусственного интеллекта.

Искусственный интеллект, с другой стороны, стремится создать компьютерные системы, которые способны выполнять задачи, требующие интеллектуальных возможностей. Объединение нейроматематики и искусственного интеллекта позволяет создавать более точные модели мозга и разрабатывать более эффективные алгоритмы для решения сложных задач. Это помогает в различных областях, таких как медицина, биология, робототехника, финансы и другие. Кроме того, совместное исследование нейроматематики и искусственного интеллекта имеет потенциал для создания более точных и эффективных искусственных нейронных сетей и алгоритмов машинного обучения. Понимание принципов работы мозга может помочь улучшить производительность и надежность таких систем.

Таким образом, совместное исследование нейроматематики и искусственного интеллекта играет важную роль в нашем стремлении к развитию более продвинутых и интеллектуальных технологий, которые могут улучшить нашу жизнь и привести к новым открытиям и достижениям.

Кроме того, ИИ является мощным инструментом для математических исследований, который позволяет решать сложные задачи и создавать более точные и эффективные модели и методы.

Список литературы

1. Goodfellow I., Bengio Y., Courville A. Deep Learning. MIT Press, 2016.
2. LeCun Y., Bengio Y., Hinton G. Deep learning // Nature. 2015. Vol. 521 (7553). P. 436–444.
3. Silver D., Huang A., Maddison C. J., Guez A., Sifre L., Van Den Driessche G., Dieleman S. Mastering the game of Go with deep neural networks and tree search // Nature. 2016. Vol. 529 (7587). P. 484–489.
4. URL: https://ru.wikibrief.org/wiki/Hodgkin-Huxley_model
5. URL: <https://nplus1.ru/material/2020/02/19/fitzhugh-nagumo-model>

ПРИМЕНЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ К РЕШЕНИЮ ФИЗИЧЕСКИХ ЗАДАЧ НА ДВИЖЕНИЕ

Алина Дмитриевна Леванова

Пензенский государственный университет, Пенза, Россия
levanova.alina12@mail.ru

Аннотация. Исследуется применение дифференциальных уравнений в физических задачах на движение.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, физические задачи, производная

APPLICATION OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS TO SOLVING PHYSICAL PROBLEMS ON MOTION

Alina D. Levanova

Penza State University, Penza, Russia
levanova.alina12@mail.ru

Abstract. The application of differential equations in physical problems for motion is investigated.

Keywords: differential equations, physical problems, derivative

Введение

Дифференциальное уравнение – это уравнение, которое помимо независимых переменных и неизвестных функции данных переменных, содержит ещё и производные неизвестных функции [3].

Очень часто мы встречаем физические задачи, которые необходимо решить с помощью дифференциальных уравнений. Это объясняется тем, что многие физические законы записаны в виде 1-й и 2-й производной.

1. Задачи на движение

При прямолинейном движении мгновенные скорость и ускорение определяются как первая и вторая производные соответственно от перемещения (пути), т.е. скорость и $v(t) = s'(t)$ ускорение $a(t) = s''(t) = v'(t)$, где $s(t)$ – перемещение точки за время t . Напомним, что если при прямолинейном движении тело не меняет направления движения, то понятия перемещения и пройденного пути совпадают.

Пусть теперь данное движение вызвано силой F , направленной вдоль прямой движения. Тогда по второму закону Ньютона $F = ma = ms''$. В обычно встречающихся задачах сила зависит от расстояния s или скорости v , что приводит к дифференциальному уравнению $ms'' = F(s)$ или $mv' = F(v)$. Далее мы рассмотрим три примера действующей силы: силу сопротивления, силу упругости и центробежную силу [1].

Сила сопротивления. Как показывает опыт, если тело при движении испытывает сопротивление среды, то сила этого сопротивления возрастает при увеличении скорости тела. При этом если скорость движения невелика и тело имеет малые размеры, то силу сопротивления можно считать пропорциональной скорости (например, сопротивление воды при движении плавучего средства по ее поверхности или при погружении небольшого объекта в воду). Если же скорость и размеры предмета велики, то сопротивление становится пропорциональным квадрату скорости (например, свободное падение большого тела в воздухе). Итак, сила сопротивления $F_r = \mu v$ или $F_r = \mu v^2$, где μ – коэффициент сопротивления. Часто для удобства коэффициент μ уменьшают в m раз, где m – масса движущегося тела, т.е. записывают $F_r = \mu m v$ или $F_r = \mu m v^2$, что позволяет сократить на ненулевой множитель второй закон Ньютона. Действительно, если, например, на тело действует только сила сопротивления, то получаем уравнения $mv' = -\mu m v$ или $mv' = -\mu v^2 m$, которые сокращаются до $v' = -\mu v$ или $v' = -\mu v^2$. Знак минус в этих уравнениях показывает, что сила сопротивления (а значит, и вызываемое ею ускорение) имеет направление, противоположное скорости движения тела [1].

Сила упругости. Если пружина находится в состоянии покоя, то по первому закону Ньютона, равнодействующая всех сил, действующих на нее, равна нулю. Однако закон Гука утверждает, при небольшой деформации пружины, т.е. при изменении ее длины, возникает сила упругости, пропорциональная величине этого изменения, которая стремится вернуть пружину в исходное положение. Следовательно, при рассмотрении колебаний пружины достаточно рассматривать силу упругости $F_e = ks$, где k – коэффициент жесткости пружины; s – отклонение от положения равновесия, и, возможно, силу сопротивления движению пружины, остальные же силы (в том числе сила тяжести) уравновешивают друг друга. Таким образом, второй закон Ньютона приводит к дифференциальному уравнению второго порядка $ms'' = -ks$ или $ms'' = -\mu s' - ks$, или $ms'' = -\mu(s')^2 - ks$. Здесь через m обычно обозначают массу груза, прикрепленного к пружине, массой же самой пружины, как правило, пренебрегают. Знак минус указывает на то, что сила упругости направлена в сторону, противоположную отклонению пружины, а сила сопротивления противоположна вектору скорости [1].

Центробежная сила. На тело массой m , движущееся по окружности радиуса r с угловой скоростью ω , действует центробежная сила $F_c = m r \omega^2$, направленная от центра окружности вращения.

Также заметим, что если тело движется не по прямой, а в плоскости или в пространстве, то задача обычно сводится уже не к одному дифференциальному уравнению, а к системе двух или трех уравнений соответственно. Связано это с тем, что описанные выше соотношения приходится рассматривать для проекций векторов перемещения, скорости, ускорения и силы на оси координат. Например, векторное равенство $v = s'$ приводит к трем скалярным равенствам, и, где $v_x = x'$, $v_y = y'$ и $v_z = z'$ – проекции скорости; x , y и z – координаты движущейся точки [1].

Задача 1. [2] Под действием сопротивления воды лодка за 1 мин замедлила свое движение с 6 до 1 км/ч. Какой путь пройдет лодка до полной своей остановки?

Решение. Пусть $v(t)$ – это скорость лодки в момент времени t . Лодка замедляет свое движение за счет силы сопротивления воды, пропорциональной скорости лодки: $F_r = \mu m v$. Тогда второй закон Ньютона приводит к дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными $v' = -\mu v$, решение которого имеет вид $v = c e^{-\mu t}$. Воспользовавшись условиями $v(0) = 6$ и $v\left(\frac{1}{60}\right) = 1$, получим, что $c = 6$ и $6e^{-\mu/60} = 1$, откуда $e^{-\mu} = 6^{-60}$. Следовательно, скорость движения лодки задается уравнением $v = 6^{1-60t}$. Из данного равенства видно, что теоретически в любой конечный момент времени скорость лодки положительна и остановка может произойти только при $t = \infty$. Итак, путь

$$s = \int_0^{+\infty} 6^{1-60t} dt = - \left. \frac{6^{1-60t}}{60 \ln 6} \right|_0^{+\infty} = \frac{1}{10 \ln 6} \approx 0,05581 \text{ км},$$

т.е. чуть менее 56 м.

Отметим, что функция $v = 6^{1-60t}$ очень быстро приближается к нулю. Например, уже через 10 мин скорость будет составлять меньше одной десятой миллиметра в час, т.е. практически равной нулю. Поэтому при расчете пути лодки до ее полной остановки несобственный интеграл можно заменить определенным

$$s = \int_0^{1/6} 6^{1-60t} dt,$$

при этом погрешность будет крайне незначительной, меньшей, чем одна тысячная миллиметра.

О т в е т: 55 м 81 см.

Задача 2. [2] Мяч весом 400 г брошен вверх со скоростью 20 м/с. Известно, что на мяч, летящий со скоростью 1 м/с, воздух оказывает сопротивление 5 Н. Считая ускорение свободного падения равным 10 м/с^2 , найти наибольшую высоту подъема мяча.

Решение. Пусть $v(t)$ – это скорость мяча в момент времени t . На движение мяча оказывают влияние направленные вниз сила тяжести $F_g = mg$ и сила сопротивления воздуха, пропорциональная квадрату скорости, $F_r = \mu v^2$. Для нахождения коэффициента μ заметим, что если $v = 1$ м/с и $m = 400$ г, то $F_r = 5$ Н. Следовательно,

$$\mu = \frac{F_r}{mv^2} = \frac{5}{400} = 0,0125 \text{ м}^{-1}$$

Теперь запишем второй закон Ньютона: $ma = -F_g - F_r$ или $mv' = -10m - 0,0125mv^2$. Сокращая на массу, получим уравнение $v' = -10 - 0,0125v^2$. Разделим переменные: $\frac{dv}{0,0125v^2 + 10} = -dt$, и проинтегрируем левую часть:

$\int \frac{dv}{0,0125v^2 + 10} = 80 \int \frac{dv}{v^2 + 800} = 2\sqrt{2} \arctg \frac{v}{20\sqrt{2}} + C$. Затем из найденного общего решения $2\sqrt{2} \arctg \frac{v}{20\sqrt{2}} = c - t$ выразим скорость:

$$v = 20\sqrt{2} \operatorname{tg} \frac{c-t}{2\sqrt{2}}.$$

Наивысшей точки своего полета мяч достигает в тот момент, когда его скорость равна нулю, т.е. при $t = c$. Следовательно, наибольшую высоту можно найти как путь, пройденный в промежуток времени от $t = 0$ до $t = c$, т.е.

$$h = 20\sqrt{2} \int_0^c \operatorname{tg} \frac{c-t}{2\sqrt{2}} dt = 80 \ln \left| \cos \frac{c-t}{2\sqrt{2}} \right| \Big|_{t=0}^{t=c} = -80 \ln \left| \cos \frac{c}{2\sqrt{2}} \right|$$

Итак, для получения окончательного ответа осталось найти значение константы c . По условию задачи $v(0) = 20$. Подставив эти значения в общее решение, находим, что

$$c = 2\sqrt{2} \arctg \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad h = -80 \ln \left| \cos \arctg \frac{1}{\sqrt{2}} \right| = 40 \ln \frac{3}{2} \approx 16,22 \text{ м}$$

(мы использовали формулу $\cos \operatorname{arctg} a = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$)

О т в е т: 16 м 22 см.

Список литературы

1. Гриншпон Я. С. Геометрические, физические и экономические задачи, сводящиеся к дифференциальным уравнениям. Томск, 2011. 74 с.
2. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа. М. : Наука, 1975. 400 с.
3. Ельцов А. А., Ельцова Т. А. Интегральное исчисление. Дифференциальные уравнения. Томск : Изд-во Томск. гос. ун-та, 2007.

АЛГОРИТМ БЫСТРОГО ВЫЧИСЛЕНИЯ ОБРАТНОГО КВАДРАТНОГО КОРНЯ

Александр Олегович Майоров

Пензенский государственный университет, Пенза, Россия
Droid2003.am@gmail.com

Аннотация. Рассматривается алгоритм быстрого вычисления обратного квадратного корня числа. Алгоритм использует неординарные битовые манипуляции для приближенного вычисления обратного квадратного корня 32-битного числа с плавающей точкой.

Ключевые слова: числа с плавающей точкой, побитовые манипуляции, приближенные вычисления

ALGORITHM FOR FAST CALCULATION OF INVERSE SQUARE ROOT

Alexander O. Mayorov

Penza State University, Penza, Russia
Droid2003.am@gmail.com

Abstract. The article discusses an algorithm for fast calculation of inverse square root of a number. The algorithm uses unorthodox bit manipulations to approximate the inverse square root of a 32-bit floating-point number.

Keywords: floating-point number, bit manipulations, approximation

При решении задач визуализации двухмерной и трёхмерной компьютерной графики часто используются элементы аналитической геометрии, в том числе векторы. Многие алгоритмы требуют нормализации векторов для корректной работы. Так, чтобы нормализовать вектор $\vec{v} = (x, y, z)$ каждую координату необходимо разделить на $|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ или же умножить на величину обратную $|\vec{v}|$, то есть $\frac{1}{|\vec{v}|} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$. Поскольку для визуализации компьютерной графики необходимо большое количество вычислений (иногда вычислений в реальном времени), необходимо быстро вычислять значение величины $\frac{1}{\sqrt{n}}$, где n – произвольное число с плавающей точкой.

Принцип работы алгоритма.

```
float Q_rsqrt(float number) {  
    long i;  
    float x2, y;  
    const float threehalfs = 1.5F;  
    x2 = number * 0.5F;  
    y = number;  
    i = *(long *) &y;  
    i = 0x5f3759df - (i >> 1);  
    y = *(float *) &i;  
    y = y * (threehalfs - (x2 * y * y));  
    // y = y * (threehalfs - (x2 * y * y));  
    return y;  
}
```

Реализация алгоритма из исходного кода Quake III: Arena (директивы препроцессора и комментарии опущены).

Описание работы функции

Стандарт языка C определяет лишь граничные размеры типов [1], но для упрощения анализа будем считать long 32-битным знаковым целым числом, а float 32-битным числом с плавающей точкой.

```
float Q_rsqrt(float number) {
```

Функция принимает и возвращает числа типа float.

```
    long i;  
    float x2, y;  
    const float threehalfs = 1.5F;  
    x2 = number * 0.5F;  
    y = number;
```

В начале функции определяются переменные необходимые для работы алгоритма.

```
    i = *(long *) &y;
```

В этой строчке кода адрес y (переменной типа float) явно преобразуется к типу указатель на long, после полученный указатель разумеется, и полученное значение сохраняется в i (переменной типа long). Эта операция позволяет побитово скопировать число типа float в число типа long.

Данная функция основывается на стандарте IEEE для чисел с плавающей точкой.

IEEE 754 – технический стандарт представления чисел с плавающей точкой, выпущенный в 1985 году Институтом инженеров электротехники и электроники (Institute of Electrical and Electronics Engineers).

В соответствии с IEEE 754, 32-битное число с плавающей точкой φ имеет следующее представление w в памяти [2]:

s	E								M																						

где s – знак числа (1 – если отрицательное число; 0 – если положительное); E – экспонента (показатель степени) (в виде целого числа со сдвигом 127 вправо); M – мантисса в нормализованном виде.

Таким образом, число равно

$$\varphi(w) = (-1)^s \left(1 + \frac{M}{2^{23}}\right) 2^{E-127}, \quad (1)$$

где φ – число, w – представление числа φ в соответствии с IEEE 754.

Представление в памяти y :

s	E								M																						

Представление в памяти i :

Переменные y и i состоят из одинаковых битов, несмотря на тип данных. Следовательно, в переменной i хранится значение $M + 2^{23}E$ (при $s = 0$). Так, $i = M + 2^{23}E$.

$i = 0x5f3759df - (i >> 1);$

Как было показано выше,

$$y = (-1)^s \left(1 + \frac{M}{2^{23}}\right) 2^{E-127}, \quad (2)$$

где y – значение одноименной переменной, s – знак числа (1 – если отрицательное число, 0 – если положительное), E – экспонента (показатель степени) (в виде целого числа со сдвигом 127 вправо), M – мантисса в нормализованном виде.

Мы полагаем $s = 0$, так как квадратный корень может быть взят только от положительного числа. Следовательно,

$$y = \left(1 + \frac{M}{2^{23}}\right) 2^{E-127}, \quad (3)$$

$$\log_2 y = \log_2 \left(\left(1 + \frac{M}{2^{23}}\right) 2^{E-127} \right), \quad (4)$$

$$\log_2 y = \log_2 \left(1 + \frac{M}{2^{23}}\right) + \log_2(2^{E-127}), \quad (5)$$

$$\log_2 y = \log_2 \left(1 + \frac{M}{2^{23}}\right) + E - 127, \quad (6)$$

Известно, что для $x \in [0; 1]$ $\log_2(1+x) \cong x$. Подобное приближение абсолютно верно в точках $x = 0$ и $x = 1$. Однако, рассмотрим $\log_2(1+x) \cong x + \mu$, где μ – поправка, которая может быть выбрана произвольно.

$$\log_2 y = \frac{M}{2^{23}} + \mu + E - 127, \quad (7)$$

$$\log_2 y = \frac{M}{2^{23}} + \frac{2^{23}E}{2^{23}} + \mu - 127, \quad (8)$$

$$\log_2 y = \frac{M + 2^{23}E}{2^{23}} + \mu - 127, \quad (9)$$

Пусть $\Gamma = \frac{1}{\sqrt{y}}$. Следовательно,

$$\log_2 \Gamma = \log_2 \frac{1}{\sqrt{y}} = \log_2 y^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} \log_2 y, \quad (10)$$

Чтобы сохранить величину $\frac{1}{\sqrt{y}}$ с битами, соответствующими типу float, в переменную типа long, будем рассматривать

$$\Gamma = (-1)^{s'} \left(1 + \frac{M'}{2^{23}}\right) 2^{E'-127}.$$

Следовательно, $\log_2 \Gamma = \frac{M' + 2^{23}E'}{2^{23}} + \mu - 127$ (аналогично с $\log_2 y$).

$$\log_2 \Gamma = -\frac{1}{2} \log_2 y, \quad (11)$$

$$\frac{M' + 2^{23}E'}{2^{23}} + \mu - 127 = -\frac{1}{2} \left(\frac{M + 2^{23}E}{2^{23}} + \mu - 127 \right), \quad (12)$$

$$\frac{M' + 2^{23}E'}{2^{23}} = -\frac{1}{2} \left(\frac{M + 2^{23}E}{2^{23}} + \mu - 127 \right) - (\mu - 127), \quad (13)$$

$$\frac{M' + 2^{23}E'}{2^{23}} = -\frac{1}{2} \left(\frac{M + 2^{23}E}{2^{23}} \right) - \frac{3}{2}(\mu - 127), \quad (14)$$

$$M' + 2^{23}E' = 2^{23} \frac{3}{2} (127 - \mu) - \frac{1}{2} (M + 2^{23}E), \quad (15)$$

$$M' + 2^{23}E' = 2^{23} \frac{3}{2} (127 - \mu) - \frac{i}{2}, \quad (16)$$

При $\mu = 0.0450465679168701171875$ [3], $2^{23} \frac{3}{2} (127 - \mu) = 5.f3759df_{16} \times 16^7 = 5f3759df_{16}$.

$$\frac{i}{2} = i \gg 1, \quad (17)$$

где $\gg$ – операция побитового сдвига вправо.

$$M' + 2^{23}E' = 5f3759df_{16} - (i \gg 1), \quad (18)$$

Следовательно, в строчке $i = 0x5f3759df - (i \gg 1)$; в переменную i (типа long) сохраняется величина приблизительно равная $\frac{1}{\sqrt{y}}$ с битами, соответствующими типу float.

$y = *(float *) \&i;$

Принцип работы данной строчки аналогичен принципу работы строчки $i = *(long *) \&y;$, описанной выше. Следовательно, переменной y хранится значение $\frac{1}{\sqrt{number}}$.

$y = y * (threehalfs - (x2 * y * y));$

Метод Ньютона – итерационный численный метод для нахождения корня заданной функции.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad (19)$$

где x_n – приблизительный корень уравнения $f(x) = 0$, x_{n+1} – уточненный корень уравнения $f(x) = 0$, $f'(x)$ – производная функции $f(x)$ по переменной x .

$$\begin{aligned} \text{Для} \quad f(y) &= \frac{1}{y^2} - x, \quad f'(y) = -\frac{2}{y^3} \\ y_{n+1} &= y_n - \frac{f(y_n)}{f'(y_n)} \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y - \frac{\frac{1}{y^2} - x}{-\frac{2}{y^3}} = y + \frac{\frac{1}{y^2} - x}{\frac{2}{y^3}} = y + \left(\frac{1}{y^2} - x \right) \frac{y^3}{2} = \frac{3y}{2} - \frac{xy^3}{2} = \\ &= y \left(\frac{3}{2} - \frac{x}{2} y^2 \right) \end{aligned} \quad (21)$$

```
// y = y * (threehalfs – (x2 * y * y));
```

Количество итераций метода Ньютона может быть увеличено для повышения точности результата. Однако даже при одной итерации относительная погрешность не превышает 0.175228 % [4].

```
return y;
```

Функция возвращает найденное значение. Алгоритм завершается.

Учитывая вышеизложенное, приведенный алгоритм позволяет получить приближенное значение обратного квадратного корня с высокой точностью за сравнительно небольшое время. Данный алгоритм может быть применен при решении задач компьютерной графики, а также при работе с процессорами, имеющими ограниченный набор инструкций.

Список литературы

1. International Organization for Standardization, International Electrotechnical Commission. 2007. С. 21.
2. Institute of Electrical and Electronics Engineers Computer Society. IEEE Standard for Floating-Point Arithmetic // Institute of Electrical and Electronics Engineers. 2012. С. 9.
3. McEniry Ch. The Mathematics Behind The Fast Inverse Square Root Function Code. 2007. С. 15.
4. Lomont Ch. Fast Inverse Square Root. Indiana : Purdue University, 2003. С. 1.

ИСКУССТВЕННЫЙ ИНТЕЛЛЕКТ И ФИНАНСЫ: ИСПОЛЬЗОВАНИЕ АЛГОРИТМОВ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ ДЛЯ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ РЫНКА И ОПТИМИЗАЦИИ ИНВЕСТИЦИЙ

*Наталья Валентиновна Мойко¹,
Наталья Васильевна Зверовщикова²,
Вячеслав Дмитриевич Макеев³*

^{1,2,3} Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

¹ nataliyavalentinovna@yandex.ru, ² nvz.matematika@yandex.ru,

³ slavamakeeff@gmail.com

Аннотация. Исследуется взаимосвязь между искусственным интеллектом и финансовым сектором, при этом делается фокус на использовании алгоритмов машинного обучения для прогнозирования рынка и оптимизации инвестиций. В последние годы роль искусственного интеллекта в финансовой сфере значительно возросла. Алгоритмы машинного обучения позволяют анализировать большие объемы данных и выявлять скрытые закономерности, которые могут помочь предсказывать движение рынка. Это открывает новые возможности для трейдеров и инвесторов, позволяя им делать более информированные решения при принятии инвестиционных решений. Кроме того, обсуждается применение алгоритмов машинного обучения для оптимизации инвестиций. Это включает в себя построение портфеля активов, распределение ресурсов и управление рисками. Автоматизация этих процессов с помощью искусственного интеллекта может значительно повысить эффективность инвестиционных стратегий и уменьшить человеческий фактор. В заключении подводятся итоги и делаются выводы о потенциале и преимуществах использования алгоритмов машинного обучения в финансовой сфере. Однако также отмечается необходимость осторожности применения искусственного интеллекта с учетом его ограничений и возможных рисков.

Ключевые слова: искусственный интеллект, финансы, алгоритмы машинного обучения, прогнозирование рынка, оптимизация инвестиций, инвесторы, регрессионный анализ, портфель активов, распределение ресурсов, управление рисками, эффективность инвестиций, риски

ARTIFICIAL INTELLIGENCE AND FINANCE: USING MACHINE LEARNING ALGORITHMS TO PREDICT MARKETS AND OPTIMIZE INVESTMENTS

*Natalia V. Moiko¹, Natalia V. Zverovshchikova²,
Vyacheslav O. Makeev³*

^{1,2,3} Penza State University, Penza, Russia

¹ nataliyavalentinovna@yandex.ru, ² nvz.matematika@yandex.ru,

³ slavamakeeff@gmail.com

Abstract. This article explores the relationship between artificial intelligence (AI) and the financial sector, focusing on the use of machine learning algorithms for

market forecasting and investment optimization. In recent years, the role of AI in the financial sector has increased significantly. Machine learning algorithms can analyze large amounts of data and identify hidden patterns that can help predict market movements. This opens up new opportunities for traders and investors, allowing them to make more informed decisions when making investment decisions. Additionally, the article discusses the application of machine learning algorithms for investment optimization. This includes asset portfolio construction, resource allocation and risk management. Automating these processes with AI can significantly improve the efficiency of investment strategies and reduce human error. In conclusion, the article summarizes the results and draws conclusions about the potential and benefits of using machine learning algorithms in the financial sector. However, it also notes the need for caution when using AI, given its limitations and possible risks.

Keywords: artificial intelligence, finance, machine learning algorithms, market forecasting, investment optimization, investors, regression analysis, asset portfolio, resource allocation, risk management, investment efficiency, risks

Введение

В последние годы искусственный интеллект стал широко применяться в финансовой сфере, где он используется для прогнозирования рынка, оптимизации инвестиций и управления рисками. Алгоритмы машинного обучения позволяют анализировать большие объемы данных и выявлять скрытые закономерности, что помогает принимать более точные и эффективные решения. Одним из наиболее распространенных применений искусственного интеллекта в финансах является создание моделей прогнозирования цен на акции, валюты и другие финансовые инструменты. Эти модели основаны на анализе исторических данных и используют различные методы машинного обучения, такие как нейронные сети, генетические алгоритмы и случайные леса.

Кроме того, ИИ применяется для оптимизации портфелей инвестиций. Алгоритмы машинного обучения позволяют определить оптимальное соотношение между различными активами в портфеле, учитывая риск и доходность. Еще одним применением искусственного интеллекта в финансах является управление рисками. Алгоритмы машинного обучения позволяют выявлять потенциальные риски и предотвращать нежелательные ситуации. Например, они могут автоматически определять мошеннические операции или прогнозировать вероятность дефолта заемщика.

Однако использование искусственного интеллекта в финансах также вызывает определенные этические вопросы. Например, есть опасность, что алгоритмы машинного обучения могут учитывать предвзятость и дискриминацию, что может привести к неравенству и несправедливости. Кроме того, существует риск нарушения конфиденциальности данных клиентов и возможности злоупотребления ими. Для того, чтобы учесть этические проблемы при использовании

искусственного интеллекта в финансах, необходимо разработать соответствующие правила и регулирования. Кроме того, необходимо обеспечить прозрачность и открытость алгоритмов машинного обучения, чтобы убедиться в их надежности и безопасности.

Машинное обучение в финансовой сфере

В финансах используются различные методы машинного обучения, включая:

- Нейронные сети – это алгоритмы, которые имитируют работу человеческого мозга. Они используются для прогнозирования цен на акции, валюты и другие финансовые инструменты.

- Генетические алгоритмы – это методы оптимизации, которые используются для определения оптимального соотношения между различными активами в портфеле инвестиций.

- Случайные леса – это методы классификации и регрессии, которые используются для прогнозирования цен на акции и другие финансовые инструменты.

- Кластерный анализ – это метод, который используется для группировки активов по сходству и различию. Он помогает инвесторам принимать более обоснованные решения при выборе активов для своего портфеля.

- Методы обработки естественного языка – это методы, которые используются для анализа новостных статей и других текстовых материалов, чтобы определить их влияние на рынок.

- Методы кластеризации – это методы, которые используются для анализа больших объемов данных и выявления скрытых закономерностей. Они помогают инвесторам принимать более точные решения при выборе активов для своего портфеля.

Прогнозирование рынка с помощью машинного обучения

Для прогнозирования рынка с помощью методов машинного обучения используются различные модели, включая нейронные сети, случайные леса, регрессионный анализ и другие. Эти модели обучаются на исторических данных о ценах на акции, объемах торгов и других факторах, которые могут влиять на рыночные тренды. Одним из основных преимуществ методов машинного обучения для прогнозирования рынка является их способность обрабатывать большие объемы данных и выявлять сложные взаимосвязи между различными факторами. Это позволяет получать более точные прогнозы и улучшать результаты инвестиционных операций.

Однако методы машинного обучения могут быть подвержены ошибкам и искажениям, если используемые данные содержат неточности или не полностью отражают реальную ситуацию на рынке.

Существуют множество успешных примеров применения машинного обучения для прогнозирования финансовых рынков.

– Алгоритмы торговли. Алгоритмическая торговля, основанная на моделях машинного обучения, использует алгоритмы для принятия решений о покупке или продаже активов на фондовых рынках. Эти алгоритмы могут анализировать большие объемы данных и выявлять паттерны, которые непросто обнаружить человеку.

– Прогнозирование цен акций. Модели машинного обучения могут анализировать исторические данные о ценах акций и других связанных факторах для прогнозирования будущих цен. Это может включать в себя использование рекуррентных нейронных сетей (RNN) или сверточных нейронных сетей (CNN) для анализа временных рядов.

– Риск-менеджмент. Модели машинного обучения могут использоваться для определения рисков в инвестиционных портфелях. Они могут предсказывать вероятность убытков и помогать управлять рисками, рекомендуя оптимальные стратегии диверсификации активов.

– Обнаружение аномалий. Алгоритмы машинного обучения могут автоматически выявлять аномалии в данных, что может быть полезно для выявления мошенничества или других аномальных событий на рынке.

– Прогнозирование валютных курсов. Модели машинного обучения могут использоваться для прогнозирования изменений валютных курсов на основе различных экономических показателей и глобальных событий.

– Кредитный скоринг. Машинное обучение также применяется в финансовой сфере для кредитного скоринга. Модели могут анализировать данные заемщика и предсказывать вероятность возврата кредита.

– Оптимизация портфеля. Машинное обучение используется для оптимизации распределения активов в инвестиционных портфелях, учитывая различные ограничения и цели инвестора.

– Прогнозирование потребительского поведения. В финансовом секторе машинное обучение используется для анализа данных о потребительском поведении, что может помочь в принятии решений о маркетинге и продажах финансовых продуктов.

Эти примеры демонстрируют разнообразные способы, которыми машинное обучение применяется в финансовой сфере для улучшения прогнозирования и принятия решений [1].

Оптимизация инвестиций с помощью машинного обучения

Оптимизация инвестиций с использованием машинного обучения (МО) – это процесс применения алгоритмов и моделей МО для принятия более информированных и точных решений о распределении капитала в инвестиционном портфеле. Вот шаги, которые могут быть использованы для оптимизации инвестиций с помощью МО:

– Сбор данных(данные о финансовых инструментах, такие как акции, облигации, фонды, криптовалюты и т.д.). Они могут включать

цену, объем торгов, финансовые отчеты компаний, макроэкономические показатели и т.д.

- Подготовка данных. Данные часто требуют очистки, нормализации и преобразования. Это может включать в себя заполнение пропущенных значений, удаление выбросов и т.д.

- Выбор признаков (факторов). Определение, какие признаки будут использоваться для анализа и моделирования (цены акций, индикаторы технического анализа, финансовые показатели компаний).

- Постановка задачи. Определение задачи МО (прогнозирование доходности портфеля, оптимизация распределения активов, управление рисками и т.д.).

- Выбор модели. Выберите подходящую модель МО для вашей задачи. Это может быть регрессия, классификация, кластеризация и другие методы.

- Обучение модели. Используйте исторические данные для обучения модели. Модель будет учитывать паттерны и зависимости в данных.

- Оценка и валидация модели: Проверьте производительность модели на отдельном наборе данных, чтобы убедиться, что она способна предсказывать с высокой точностью.

- Принятие решений. На основе результатов модели можно оптимизировать инвестиционный портфель (ребалансировка активов, выбор оптимального распределения активов и т.д.).

- Мониторинг и адаптация. Инвестиционная среда постоянно меняется, поэтому важно регулярно мониторить результаты и модель, а также адаптировать портфель к новым условиям.

- Управление рисками. Важно учесть риски и установить стратегии управления рисками, чтобы минимизировать потери в случае неблагоприятных событий.

Отметим, что машинное обучение не является универсальным средством исключительно для инвестиций, и оно должно использоваться в сочетании с фундаментальным анализом и экспертными знаниями.

Проблемы и ограничения применения машинного обучения в финансах

Применение машинного обучения сопряжено с рядом проблем и ограничений.

- Недостаток данных. Для успешного обучения моделей МО требуются большие объемы данных. В некоторых финансовых областях, таких как управление активами, доступные данные могут быть ограниченными и шумными, что может осложнить обучение надежных моделей.

- Неопределенность рынка. Финансовые рынки характеризуются высокой степенью неопределенности и случайности. Даже самая продвинутая модель не может предсказать события, которые могут

повлиять на цену активов, такие как политические решения, природные бедствия и другие факторы.

- Переобучение. Склонность к переобучению является серьезным ограничением. Модели МО могут быть чрезмерно настроены на исторические данные и неспособны адекватно обобщать результаты на новые данные.

- Нелинейность и сложность. Во многих финансовых задачах зависимости между переменными могут быть сложными и нелинейными. Это может сделать сложным выбор подходящей модели и интерпретацию результатов.

- Проблема с внешними факторами. Финансовые рынки могут подвергаться воздействию внешних факторов, которые не учитываются в данных (неожиданные события и новости). Это может сильно влиять на результаты моделей.

- Гипотеза эффективных рынков. Эффективность рынка предполагает, что цены активов уже содержат всю доступную информацию, что делает сложным получение постоянной выгоды с использованием МО.

- Проблемы с разреженными данными. Во многих финансовых задачах данные могут быть разреженными, что усложняет обучение моделей и требует дополнительных методов обработки.

- Искусственные изменения. Распространение алгоритмической торговли может привести к изменению рыночной динамики и созданию "шума" в данных, что затрудняет работу моделей МО.

- Этические и регуляторные вопросы. Применение МО в финансах может вызвать вопросы о справедливости и этике, а также столкнуться с регуляторными ограничениями и требованиями.

- Интерпретация результатов. Модели МО могут быть сложными для интерпретации, что может затруднить принятие решений и объяснение результатов инвесторам и регуляторам [2].

Заключение

В целом, прогнозирование рынка с помощью методов машинного обучения является эффективным инструментом для инвесторов, но требует осторожности и грамотного подхода к анализу данных и принятию инвестиционных решений. Необходимо понимать, что МО в финансах – это мощный инструмент, но не панацея. Эффективное применение МО в финансах требует аккуратной работы с данными, учета ограничений и постоянной адаптации к меняющимся рыночным условиям.

Список литературы

1. De Prado López Marcos. Machine learning for asset managers. Cambridge : Cambridge university press, 2020. 146 p.
2. Ernie Chan. Algorithmic Trading. Winning Strategies and Their Rationale. New Jersey : Tohrwiley, 2013. 225 p.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ ДЛЯ АЛГОРИТМИЧЕСКОЙ ТОРГОВЛИ НА ФИНАНСОВЫХ РЫНКАХ

Максим Игоревич Меркурьев

Пензенский государственный университет, Пенза, Россия
maksmerkurev@yandex.ru

Аннотация. Описывается возможность применения машинного обучения в алгоритмической торговле на финансовых рынках с целью оптимизации инвестиционных стратегий и повышения эффективности принятия решений с использованием библиотеки OpenAI Gym, предназначенной для разработки и сравнения алгоритмов обучения с подкреплением.

Ключевые слова: машинное обучение, алгоритмическая торговля, финансовые рынки, прогнозирование, обучение с подкреплением, торговые операции

USING MACHINE LEARNING FOR ALGORITHMIC TRADING IN FINANCIAL MARKETS

Maksim I. Merkurev

Penza State University, Penza, Russia
maksmerkurev@yandex.ru

Abstract. The article describes the possibility of applying machine learning in algorithmic trading on financial markets with the aim of optimizing investment strategies and improving decision-making efficiency, using the OpenAI Gym library, which is designed for the development and comparison of reinforcement learning algorithms.

Keywords: machine learning, algorithmic trading, financial markets, forecasting, reinforcement learning, trading operations

В настоящий момент в финансовых рынках широко используется машинное обучение. Алгоритмы машинного обучения анализируют большие объемы данных для принятия торговых решений, прогнозирования ценовых тенденций и волатильности рынка, определения оптимального времени для покупки или продажи активов и управления рисками. Машинное обучение становится все более популярным в алгоритмической торговле, помогая трейдерам автоматизировать и оптимизировать операции, особенно на быстро меняющихся финансовых рынках.

В данной работе рассматривается алгоритмическая торговля на основе машинного обучения. Алгоритмическая торговля – это процесс использования компьютерных программ для выполнения торговых операций на финансовых рынках. Основные принципы алгоритмической торговли включают в себя использование сложных математических моделей для определения оптимальных точек входа и выхода, автоматизацию процесса торговли и уменьшение влияния человеческого фактора.

Преимущества алгоритмической торговли включают в себя повышенную скорость и точность операций, возможность обрабатывать большие объемы данных, снижение риска ошибок, связанных с человеческим фактором, и возможность торговать на нескольких рынках одновременно. Однако, алгоритмическая торговля также несет в себе риски. Ошибки в алгоритмах могут привести к большим потерям, а сложность систем может создать проблемы в управлении рисками.

В алгоритмической торговле обычно используются три типа машинного обучения: обучение с учителем, обучение без учителя и обучение с подкреплением.

Использование машинного обучения в алгоритмической торговле включает прогнозирование цен на акции, определение оптимального времени для покупки или продажи, анализ рыночных тенденций и выявление аномалий в торговых данных [1].

Машинное обучение состоит из нескольких этапов. Первый этап состоит из сбора данных для обучения [1]. Это могут быть исторические данные о ценах акций, объемах торгов, финансовых показателях компаний и т.д. Данные должны быть предварительно обработаны и преобразованы в формат, который можно использовать для обучения модели. После этого происходит обучение модели, затем ее тестирование и валидация. В результате модель внедряется и используется для прогнозирования на реальных данных.

В работе обучается модель машинного обучения для алгоритмической торговли на языке программирования Python. Для этого использовалась библиотека OpenAI Gym, предназначенная для разработки и сравнения алгоритмов обучения с подкреплением.

Используя вспомогательные библиотеки, получим исторические данные BTC/USDT с Binance с начала августа 2023 года:

```
download(exchange_names = ["binance"],
        symbols= ["BTC/USDT"],
        timeframe= "1h",
        dir = "data",
        since= datetime.datetime(year= 2023, month= 8, day=1)
)
```

Исходные данные импортируются в датафрейм с добавлением новых полей [2]:

```
df = pd.read_pickle("./data/binance-BTCUSDT-1h.pkl")
df["feature_close"] = df["close"].pct_change()
df["feature_open"] = df["open"] / df["close"]
df["feature_high"] = df["high"] / df["close"]
df["feature_low"] = df["low"] / df["close"]
df["feature_volume"] = df["volume"] /
df["volume"].rolling(7*24).max()
```

Объявляются вспомогательные функции вознаграждения, получения последней занятой позиции и реальной текущей позиции:

```
def reward_function(history):
    return np.log(history["portfolio_valuation", -1] / history["portfolio_valuation", -2])
```

```
def dynamic_feature_last_position_taken(history):
    return history['position', -1]
```

```
def dynamic_feature_real_position(history):
    return history['real_position', -1]
```

Создается среда для торговли криптовалютой (BTCUSD) с использованием библиотеки gym. В качестве исходных данных для среды используется созданный ранее датафрейм. Среди параметров среды задаются функции для создания динамических признаков; возможные позиции, которые может занять агент: -1 (продажа), 0 (выход), 1 (покупка); комиссию за торговлю; процентную ставку за заем, а также функцию награды:

```
env = gym.make(...)
```

Добавляются два новых критерия оценки в окружение торговой среды. Они помогают отслеживать и анализировать динамику торговых операций:

```
env.unwrapped.add_metric('Position Changes', lambda history :
np.sum(np.diff(history['position']) != 0))
env.unwrapped.add_metric('Episode Lenght', lambda history :
len(history['position']))
```

После выполнения эпизода торговых операций, алгоритм сохраняет полученные результаты для последующего анализа или визуализации, что может помочь в интерпретации производительности торговой системы и ее поведения в различных ситуациях:

```
done, truncated = False, False
observation, info = env.reset()
while not done and not truncated:
    position_index = env.action_space.sample()
```

```

        observation, reward, done, truncated, info =
            env.step(position_index)
    env.unwrapped.save_for_render(dir='render_logs')
    renderer = Renderer(render_logs_dir="render_logs")
    renderer.run()

```

В процессе работы программы, Flask рендерит страницу в браузере. Благодаря этому, если перейти по URL-адресу <http://127.0.0.1:5000> в браузере, то можно увидеть визуализацию действий агента и результаты его работы (рис. 1).

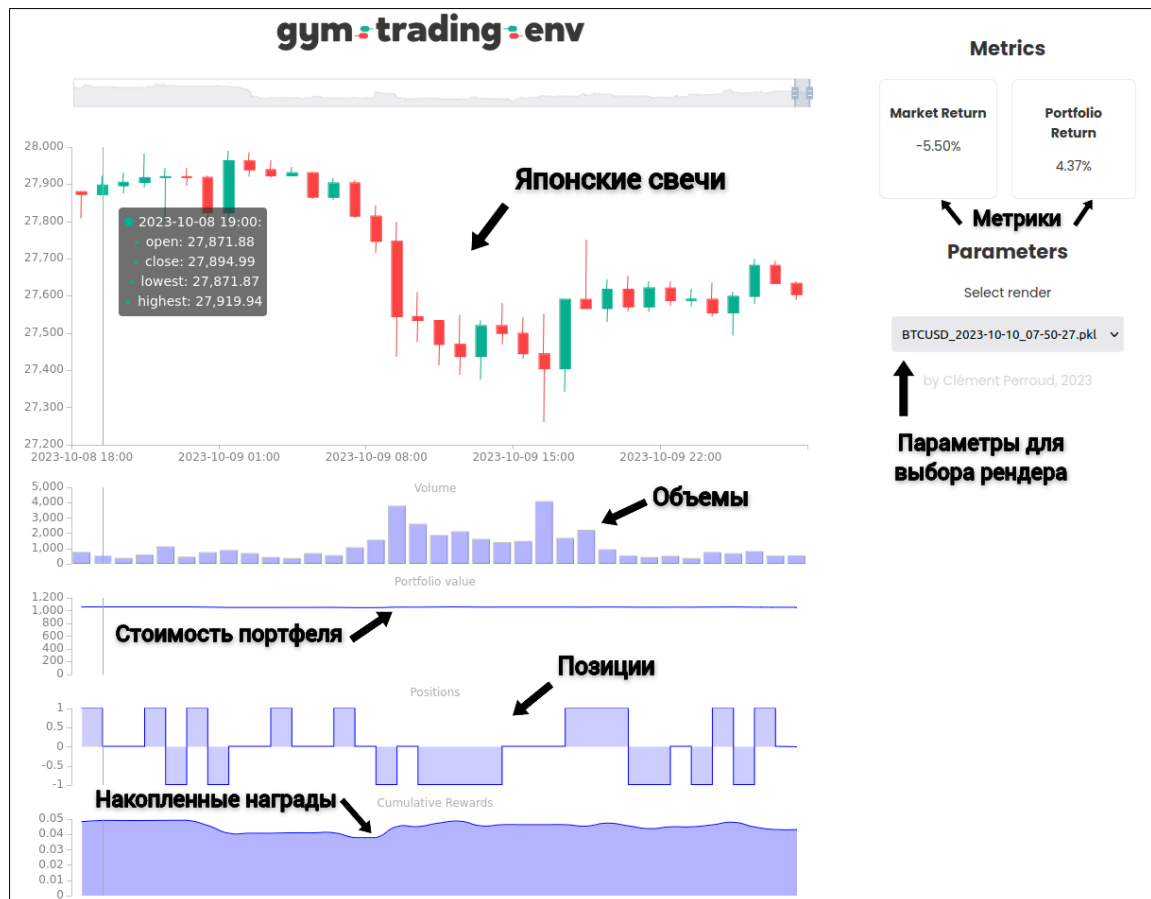


Рис. 1. Визуализация действий агента и результатов его работы

На рис. 1 справа можно увидеть Market Return и Portfolio Return – два ключевых показателя, используемых в инвестициях и финансах для измерения прибыльности. Market Return – прибыльность всего рынка или биржевого индекса за определенный период времени, показатель представляет собой «среднюю» доходность, которую инвестор мог бы ожидать при инвестировании в широкий рынок. Portfolio Return – конкретная доходность индивидуального портфеля инвестиций за определенный период времени. Данный показатель характеризует, как хорошо справляются ваши инвестиции по сравнению с рынком в целом.

После анализа этих двух метрик, можно с уверенностью заявить, что обученный агент успешно справился с поставленной задачей, демонстрируя хорошие результаты по сравнению с общим рынком. Но стоит помнить, что это не является окончательным и абсолютным показателем, поскольку рыночная ситуация может быстро и неожиданно измениться.

Рассмотрим несколько ключевых факторов, влияющих на успешность использования машинного обучения в алгоритмической торговле. Во-первых, качество и объем используемых данных критичны. Большие, чистые и разнообразные наборы данных могут улучшить точность прогнозов модели. Во-вторых, выбор подходящей модели машинного обучения и ее правильная настройка также важны. Некоторые модели могут быть более эффективными для определенных типов данных или задач.

Существуют потенциальные проблемы и риски. Одна из основных проблем — переобучение, когда модель становится слишком специализированной на обучающих данных и теряет способность к обобщению на новых данных [1]. Кроме того, существует риск «черного ящика», когда сложные модели машинного обучения становятся непонятными для пользователей, что затрудняет интерпретацию их прогнозов.

Перспективы использования машинного обучения в алгоритмической торговле обещают быть весьма обнадеживающими. С учетом быстрого развития технологий и увеличения доступности и объема данных, машинное обучение будет играть все более важную роль в финансовой торговле. Машинное обучение может помочь улучшить точность прогнозов, увеличить скорость анализа и принятия решений, а также уменьшить влияние человеческого фактора.

Успешность применения машинного обучения в алгоритмической торговле зависит от ряда факторов, включая качество данных, выбор и настройку модели, а также постоянное обновление и переобучение модели. С учетом этих аспектов машинное обучение может стать ключевым элементом успешной алгоритмической торговли.

Список литературы

1. Янсен С. Машинное обучение для алгоритмической торговли на финансовых рынках : практикум. СПб., 2020. 560 с.
2. Плас Дж. Вандер. Python для сложных задач: наука о данных и машинное обучение. СПб., 2018. 576 с.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ

Ирина Михайловна Мойко¹, Дмитрий Алексеевич Ушкин²

^{1,2} Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

¹ irmojko@yandex.ru, ² diman222ushkin@gmail.com

Аннотация. Посвящена исследованию численных методов решения дифференциальных уравнений в теории колебаний. В задачах теории колебаний численное решение дифференциальных уравнений может использоваться для определения амплитуды, периода и фазы колебаний. Оно может применяться и для моделирования колебательных систем с маятником, пружинами, а также электрических цепей и сложных систем с несколькими степенями свободы. Рассмотрена эффективность каждого из методов.

Ключевые слова: колебания, численные методы, моделирование, колебательные системы

NUMERICAL SOLUTION OF DIFFERENTIAL EQUATIONS IN PROBLEMS OF VIBRATION THEORY

Irina M. Moiko¹, Dmitry A. Ushkin²

^{1,2} Penza State University, Penza, Russia

¹ irmojko@yandex.ru, ² diman222ushkin@gmail.com

Abstract. This paper is devoted to the study of numerical methods for solving differential equations in the theory of oscillations. In problems of vibration theory, numerical solution of differential equations can be used to determine the amplitude, period and phase of oscillations. It can also be used to model oscillating systems with pendulum, springs, as well as electrical circuits and complex systems with multiple degrees of freedom. The paper also discusses the effectiveness of each method.

Keywords: oscillations, numerical methods, modeling, oscillating systems

Введение

Дифференциальные уравнения являются одним из основных математических инструментов для моделирования различных физических процессов, в том числе колебательных явлений. Колебания возникают во многих областях науки и техники, таких как механика, электродинамика, акустика, оптика и др. Для анализа и исследования свойств колебательных систем часто требуется решать дифференциальные

уравнения, описывающие их динамику. Однако в большинстве случаев получить точное аналитическое решение таких уравнений невозможно или очень сложно. Поэтому возникает необходимость применения численных методов для приближенного решения дифференциальных уравнений. Целью данной статьи является обзор существующих численных методов для решения дифференциальных уравнений в задачах теории колебаний, а также сравнение их эффективности, точности и устойчивости. Мы рассмотрим три наиболее известных и широко применяемых метода: метод Адамса, метод Эйлера и метод Рунге-Кутты.

Метод Адамса

Метод Адамса – это конечноразностный многошаговый метод численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Он использует несколько значений, которые уже вычислены в предыдущих точках, для вычисления очередного значения искомого решения. Метод Адамса является простым и эффективным методом, который может использоваться для решения большинства обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Рассмотрим некоторые преимущества и недостатки этого метода.

Преимущества:

- имеет высокий порядок точности, так как он использует несколько предыдущих значений решения для вычисления следующего значения,
- хорошо подходит для решения устойчивых и периодических решений, так как его погрешность остается ограниченной или растет очень медленно,
- может применяться как для решения простых дифференциальных уравнений, так и для их систем.

Недостатки:

- требует предварительного вычисления решения в начальных точках, для чего обычно используют одношаговые методы, например, метод Рунге-Кутты,
- является неявным и требует решения нелинейной системы уравнений для нахождения значения в следующей точке,
- может быть неустойчив при слишком большом шаге.

Расчётные формулы метода Адамса для решения системы дифференциальных уравнений первого порядка имеют вид:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} (3f(t_n, y_n) - f(t_{n-1}, y_{n-1}))$$

где h – шаг сетки; t_n – значение независимой переменной в точке n ; y_n – приближенное значение решения в точке n , а $f(t_n, y_n)$ – правая часть дифференциального уравнения в точке (t_n, y_n) . Метод Адамса

имеет несколько модификаций, таких как метод Адамса-Башфорта и метод Адамса-Мульттона.

Метод Эйлера

Метод Эйлера – это один из самых простых численных методов для решения дифференциальных уравнений. Он основан на приближении кривой решения линейными отрезками.

Преимущества:

- легко понять и реализовать, так как он требует только сложения и умножения;

- может быть использован для решения нелинейных и систем дифференциальных уравнений;

- является основой для более точных и устойчивых методов, таких как модифицированный метод Эйлера или метод Рунге-Кутты.

Недостатки:

- имеет низкий порядок точности, так как он использует только одно предыдущее значение решения для вычисления следующего значения.

- имеет слишком большую погрешность, которая имеет тенденцию накапливаться с каждым шагом.

- может быть неустойчив при решении жестких дифференциальных уравнений или при слишком большом или малом шаге.

Рассмотрим задачу Коши для уравнения первого порядка:

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0,$$

где функция определена на некоторой области. Решение ищется на полуинтервале. На этом промежутке введём узлы x_i . Приближенное решение в узлах, которое обозначим через y_i , определяется по формуле:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i),$$

где h – шаг сетки, $x_i = x_0 + ih$. Эти формулы непосредственно обобщаются на случай систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Метод Эйлера является явным, одношаговым методом первого порядка точности. Он основан на аппроксимации интегральной кривой кусочно-линейной функцией – так называемой ломаной Эйлера.

Метод Рунге-Кутта четвертого порядка

Метод Рунге-Кутта – это семейство явных и неявных итерационных методов, которые используются для численного решения дифференциальных уравнений. Он был разработан в начале двадцатого века немецкими математиками Карлом Рунге и Вильгельмом Кутта.

Преимущества:

- имеет высокий порядок точности, так как он использует несколько промежуточных значений функции для вычисления следующего значения решения;

- может быть использован для решения нелинейных и систем дифференциальных уравнений;

- является основой для более точных и устойчивых методов, таких как модифицированный метод Рунге-Кутты или методы с переменным шагом.

Недостатки:

- требует большого количества вычислений, так как он использует несколько стадий на каждом шаге;

- может быть неустойчив при слишком большом или малом шаге;

- может давать неверные результаты при решении уравнений с особенностями.

Для простоты рассмотрим задачу Коши для уравнения первого порядка:

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0,$$

где функция определена на некоторой области. Решение ищется на полуинтервале.

На этом промежутке введём узлы. Приближенное решение в узлах, которое обозначим через y_i , определяется по формуле:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2 \cdot k_2 + 2 \cdot k_3 + k_4),$$

где h – шаг сетки, $x_i = x_0 + ih$, а k_1 , k_2 , k_3 и k_4 определяются следующим образом:

$$k_1 = f(x_i, y_i), \quad k_2 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_1\right), \quad k_3 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_2\right),$$

$$k_4 = f(x_i + h, y_i + hk_3).$$

Основная идея метода Рунге-Кутты заключается в построении специального алгоритма, чтобы приращение функции на шаге совпадало с приращением, которое определяется из ряда Тейлора с учетом возможно большего числа членов.

Сравнение методов

Рассмотрим модельный пример. Решим указанными методами уравнение $\frac{dy}{dx} = y$ и сравним полученные результаты с точным решением.

Таблица 1

Погрешности при решении модельного примера и приближенных методов

Точное значение		Метод Рунге-Кутта		Метод Адамса		Метод Эйлера	
x_i	y_i	ε_i – абсолютная величина между точным и приближенным решениями	y_i	ε_i – абсолютная величина между точным и приближенным решениями	y_i	ε_i – абсолютная величина между точным и приближенным решениями	y_i
0	1	0	1	0	1	0	1
0.1	1.10517	0.00017	1.105	0.00017	1.105	0.00517	1.1
0.2	1.2214	0.0004	1.221	0.0004	1.221	0.0114	1.21
0.3	1.34986	0.00086	1.349	0.00086	1.349	0.01886	1.331
0.4	1.49182	0.00082	1.491	0.00082	1.491	0.02782	1.464
0.5	1.64872	0.00072	1.648	0.00072	1.648	0.03772	1.611
0.6	1.82212	0.00112	1.821	0.00112	1.821	0.05012	1.772
0.7	2.01375	0.00175	2.012	0.00175	2.012	0.06475	1.949
0.8	2.22554	0.00354	2.222	0.00354	2.222	0.08154	2.144
0.9	2.4596	0.0056	2.454	0.0056	2.454	0.1016	2.358

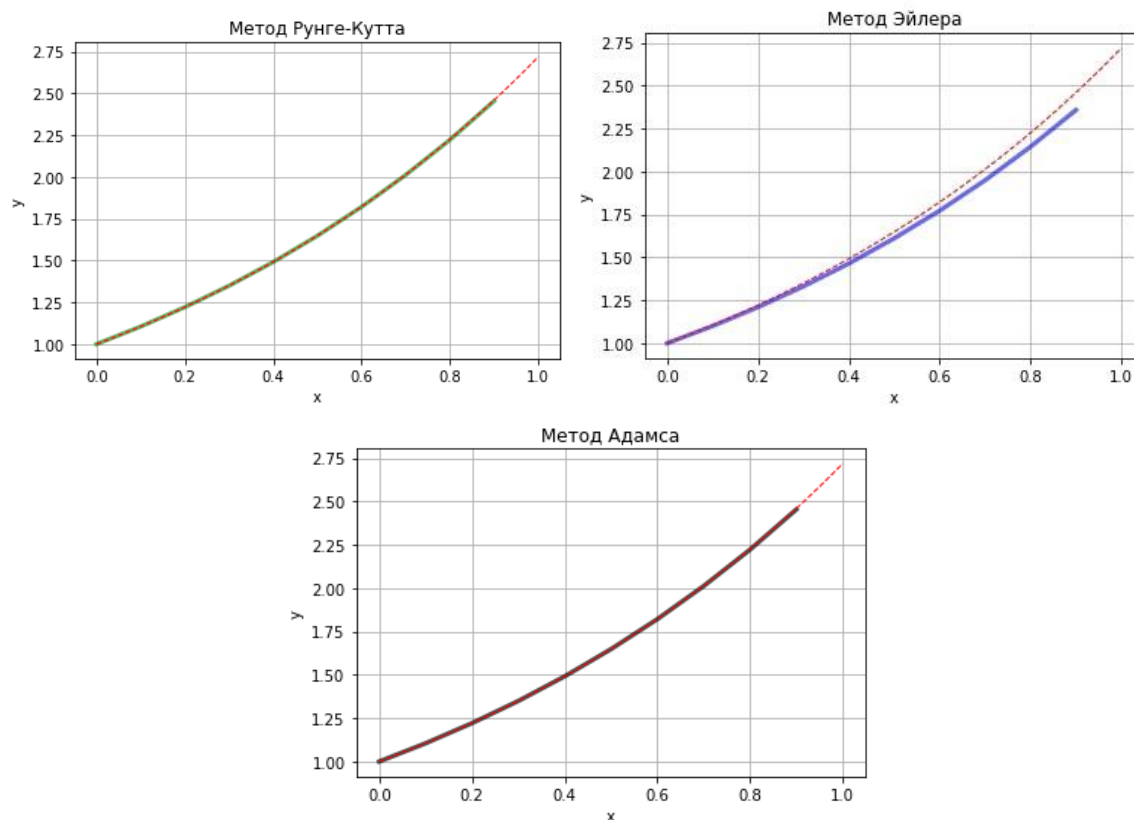


Рис. 1. Значения, полученные при решении модельного примера методом Рунге-Кутта, методом Эйлера, методом Адамса по сравнению с аналитическим решением

В результате проведенного исследования было получено аналитическое решение дифференциального уравнения и численные решения методами Рунге-Кутты, Эйлера и Адамса. Были построены графики (рис. 1) и составлена таблица с погрешностями (табл. 1). Из проведенного анализа видно, что метод Рунге-Кутты обеспечивает наиболее точное решение, в то время как метод Эйлера имеет наибольшую погрешность. Таким образом, для решения данного дифференциального уравнения рекомендуется использовать метод Рунге-Кутты.

Заключение

В статье рассмотрены численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений в задачах теории колебаний. Основное внимание уделено методам Адамса, Рунге-Кутты и Эйлера, которые относятся к классу одношаговых и многошаговых методов. Сравнены достоинства и недостатки различных методов с точки зрения точности, скорости и устойчивости. Показано, что метод Рунге-Кутты обладает наибольшей точностью и универсальностью среди рассмотренных методов, но требует большего объема вычислений. Метод Адамса имеет высокую скорость и экономичность, но требует дополнительных условий для начала процесса. Метод Эйлера является самым простым и наглядным, но имеет низкую точность и устойчивость. В зависимости от конкретной задачи и требуемой точности можно выбрать наиболее подходящий метод или комбинировать их.

Список литературы

1. Пасконов В. М., Полежаев В. И., Чудов Л. А. Численное моделирование процессов тепло- и массообмена. М. : Наука, 1984. 288 с.
2. Скворцов Л. М. Численное решение обыкновенных дифференциальных и дифференциально-алгебраических уравнений. 2-е изд. М. : ДМК Пресс, 2022. 236 с.
3. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. 7-е изд. М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2011. 636 с.

КОЛЕБАНИЯ В БИОЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ: МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ

Ирина Михайловна Мойко¹, Дарья Владимировна Папшева²

^{1,2} Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

¹ irmojko@yandex.ru, ² papsevadara30@gmail.com

Аннотация. Посвящена исследованию колебательных явлений, присутствующих в биологических системах, и методам их моделирования и анализа. Колебания являются важной характеристикой множества биологических процессов, таких как сердечная активность, синхронизация биоритмов и взаимодействие клеточных элементов. Рассматриваются различные математические и компьютерные модели, которые могут быть использованы для описания и анализа колебаний в биологических системах. Представлен обзор современных методов анализа временных рядов, спектрального анализа и стохастических моделей, применяемых к биологическим данным. Рассматриваются практические приложения полученных результатов, включая возможности улучшения диагностики и лечения биологических нарушений, основанные на понимании колебательных механизмов.

Ключевые слова: колебания, биологические системы, моделирование, анализ, временные ряды, спектральный анализ, диагностика, лечение

FLUCTUATIONS IN BIOLOGICAL SYSTEMS: MODELING AND ANALYSIS

Irina M. Moiko¹, Daria V. Papsheva²

^{1,2} Penza State University, Penza, Russia

¹ irmojko@yandex.ru, ² papsevadara30@gmail.com

Abstract. This article is devoted to the study of oscillatory phenomena present in biological systems and methods for their modeling and analysis. Oscillations are an important characteristic of many biological processes, such as cardiac activity, biorhythm synchronization, and the interaction of cellular elements. The article discusses various mathematical and computer models that can be used to describe and analyze oscillations in biological systems. The authors provide an overview of modern methods for time series analysis, spectral analysis, and stochastic models applied to biological data. The article also discusses practical applications of the findings, including opportunities to improve the diagnosis and treatment of biological disorders based on an understanding of oscillatory mechanisms.

Keywords: oscillations, biological systems, modeling, analysis, time series, spectral analysis, diagnostics, treatment

Введение

В биологии наблюдаются разнообразные процессы, которые можно описать с использованием математических моделей. Одним из интересных и важных аспектов являются колебания в биологических системах. Колебания возникают в различных биологических системах, начиная от сердечного ритма до колебаний уровня глюкозы в крови. Математическое моделирование и анализ колебаний в биологических системах позволяют более глубоко понять их природу и механизмы регуляции. Колебаниями могут быть описаны как регулярные, так и нерегулярные изменения во времени различных параметров, связанных с живыми организмами. Эти колебания могут иметь разную природу и широкий спектр применений в биологии. Вот несколько общих типов колебаний в биологических системах: биологические ритмы (обычно связаны с изменениями окружающей среды и помогают организмам адаптироваться к ней); химические колебания (например, в нейрофизиологии колебания мембранного потенциала нейрона могут привести к пульсирующей активности); генетические колебания (например, в экспрессии генов могут возникать периодические колебания); экологические колебания (например, колебания численности популяций животных могут быть вызваны колебаниями доступности пищи, изменениями климата и другими факторами); колебания в нейронных сетях (нейронные системы могут проявлять сложные колебательные паттерны, которые контролируют разнообразные биологические функции, включая координацию движений и восприятие).

Для изучения и анализа колебаний в биологических системах используются различные методы, включая математическое моделирование, электрофизиологические записи, молекулярные и генетические методы и многие другие.

Математическое моделирование биологических систем

Моделирование биологических колебаний обычно включает в себя создание математических моделей, которые описывают динамику системы. Эти модели могут быть дифференциальными уравнениями, разностными уравнениями или стохастическими моделями, в зависимости от характера колебаний и уровня детализации модели [1,2].

Остановимся на математических моделях, основанных на дифференциальных уравнениях.

1. Одной из распространенных моделей является модель осциллятора, которая описывает колебательные процессы в системе. Осцилляторы имеют ключевое значение в изучении биологических ритмов, таких как сердечный ритм или циркадные ритмы сна и бодрствования. В данной модели создается упрощенная система дифференциальных уравнений, которая моделирует биологический осциллятор. Модель

содержит три связанных переменных $y_1(t)$, $y_2(t)$ и $y_3(t)$, которые представляют собой состояния системы, меняющиеся со временем. Система описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = \alpha(y_2 - y_1) \\ \frac{dy_2}{dt} = y_1(\beta - y_3) - y_2 \\ \frac{dy_3}{dt} = y_1 y_2 - \gamma y_3 \end{cases}$$

Здесь $\frac{dy_1}{dt}$, $\frac{dy_2}{dt}$, $\frac{dy_3}{dt}$ – производные по времени t ; α – параметр, который контролирует скорость изменения y_1 в зависимости от разницы между y_2 и y_1 ; β – параметр, который влияет на изменение y_2 в зависимости от y_1 и y_3 ; γ – параметр, который определяет влияние y_3 на динамику системы.

Предложенная система дифференциальных уравнений может быть интерпретирована как модель биологического осциллятора или колебательной реакции, которая может иметь место в различных биологических системах (система реакций между молекулами, которые периодически изменяют свои концентрации в результате взаимодействий друг с другом). Колебания в переменных y_1 , y_2 и y_3 могут иметь различные интерпретации в зависимости от конкретной биологической системы. Это может быть изменение концентрации химических веществ, активности генов или другие биологические процессы, которые подчиняются подобным динамическим законам. Значения параметров α , β и γ могут быть настроены в соответствии с конкретной биологической ситуацией.

2. Моделирование пищевых цепей. Уравнения Лотки-Вольтерра являются системой дифференциальных уравнений, описывающих взаимодействие хищников и их жертв в экологической системе. Эта модель имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{dV}{dt} = \alpha V - \beta VP \\ \frac{dP}{dt} = \delta PV - \gamma P \end{cases},$$

где V – количество жертв (например, популяция кроликов); P – количество хищников (например, популяция лис); α – коэффициент роста жертв; β – коэффициент взаимодействия между жертвами и хищниками; γ – коэффициент смертности хищников; δ – коэффициент роста хищников.

Эти уравнения описывают, как изменяются популяции жертв и хищников со временем. Первое уравнение показывает, что популяция жертв увеличивается с ростом αV и уменьшается при взаимодействии с хищниками βVP . Второе уравнение показывает, что популяция хищников уменьшается из-за смертности γP и растет за счет пойманных жертв δPV . Моделирование на основе уравнений Лотки-Вольтерра может помочь предсказать, как изменения в популяции одного вида могут влиять на популяцию другого вида, и как различные факторы, такие как доступность пищи или смертность, могут влиять на эти популяции.

3. Уравнения ФитцХью-Нагумо являются моделью, которая используется для описания динамики нейрональной активности в нейрональных сетях. Эта модель является упрощенной моделью Ходжкина-Хаксли и имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{u} = u - \frac{u^3}{3} - v + D\nabla^2 u + I \\ \dot{v} = \varepsilon(u - bv + a) \end{cases}.$$

Переменная u описывает динамику мембранного потенциала, а v отвечает за его восстановление. Параметры a, b, ε – некоторые константы, причем значение ε , как правило, предполагается малым: $\varepsilon \ll 1$, а I – стимулирующий поток. Ввиду достаточной простоты как модели, описывающей динамическое поведение нейронной активности, модель ФитцХью-Нагумо была подробно изучена.

4. Модель ферментативных колебаний Брауна описывает динамическую систему, в которой происходят колебания концентрации реагентов под воздействием ферментативных реакций [3]. Обычно эта модель представляется системой дифференциальных уравнений, которые описывают скорости изменения концентраций во времени. Эти уравнения могут быть сложными и зависят от конкретной формулировки модели и системы реакций. В частности, эти уравнения могут иметь вид:

$$\begin{cases} \frac{dE}{dt} = k_1 S - k_2 E \\ \frac{dS}{dt} = -k_1 S - k_2 E \end{cases},$$

где первое уравнение показывает изменения концентрации фермента E со временем t ; второе – изменения концентрации субстрата S со временем t ; k_1 – скорость образования комплекса фермента и субстрата; k_2 – скорость разложения комплекса фермента и субстрата.

Это лишь несколько примеров моделей колебаний в биологических системах с использованием дифференциальных уравнений. В реальности существует множество других моделей, которые можно применять в зависимости от конкретного исследования.

Анализ биологических систем

После разработки математических моделей, следующим шагом является анализ колебаний в биологических системах с использованием различных методов и подходов. Этот анализ позволяет определить ключевые параметры и факторы, влияющие на колебательное поведение системы, а также выявить возможные паттерны и тенденции в динамике системы. Это может включать в себя использование методов линейной стабильности, численного анализа, анализа устойчивости и других статистических методов. Вот некоторые из них:

- Фурье-анализ: Фурье-анализ используется для разложения сложного сигнала или временного ряда на набор синусоидальных компонент с различными частотами (в биологических системах это может быть полезным при изучении периодических колебательных процессов, таких как секундомерный механизм сердца или ритмы мозговой активности);

- спектральный анализ: спектральный анализ используется для исследования частотных свойств сигналов или временных рядов (он позволяет определить частотный состав сигнала и выделить доминирующие частоты или спектральные особенности, в биологии спектральный анализ может применяться для изучения спектра электроэнцефалограммы (ЭЭГ) или ритмов сердца.

- устойчивость и бифуркации: анализ устойчивости и бифуркаций связан с исследованием изменений в системе и ее поведения при изменении параметров (может быть применено для анализа динамических систем, таких как модели генных сетей или нейрональные сети).

Эти методы анализа помогают понять колебательные явления и динамику биологических систем, раскрывая интересные паттерны и связи.

Заключение

Исследование колебаний в биологических системах имеет значительное значение в сфере биологии и медицины.

- Понимание физиологии и адаптации: колебания играют ключевую роль в физиологии живых организмов, помогая им адаптироваться к изменяющимся условиям окружающей среды. Исследования в этой области помогают лучше понять механизмы адаптации организмов к различным стрессам и изменениям.

- Диагностика и лечение заболеваний: колебания могут служить важными индикаторами состояния здоровья. Исследования в этой области помогают разрабатывать методы диагностики и мониторинга различных заболеваний, таких как неврологические расстройства, сердечно-сосудистые заболевания и другие.

- Биотехнологии: понимание колебаний на уровне генов, белков и химических реакций является важным для разработки биотехнологий

и лекарств. Это может включать в себя модуляцию генетических колебаний для лечения генетических заболеваний или использование колебательных характеристик для доставки лекарств.

– Разработка технологий имитации биологических процессов: могут быть вдохновением для создания технологий, имитирующих биологические процессы. Это может привести к разработке биоинспирированных решений в робототехнике, сенсорах и других технологиях.

– Основы для математического моделирования: предоставляют данные для разработки математических моделей, которые могут помочь в предсказании поведения биологических систем. Эти модели могут быть полезными инструментами для более глубокого понимания и предсказания реакций организмов на различные воздействия.

Исследования в области колебаний в биологических системах не только расширяют наши знания о природе жизни, но и имеют практическое применение в медицине, биотехнологии и других областях, внося важный вклад в развитие науки и технологии.

Список литературы

1. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. М. : Наука, 1981. 568 с.
2. Чернавский Д. С., Чернавская Н. М. О колебаниях в темновых реакциях фотосинтеза // Колебательные процессы в биологических и химических системах : сб. тр. Всесоюз. симпозиума по колебательным процессам в биол. и хим. системах. М. : Наука, 1967.
3. Быков В. И. Моделирование критических явлений в химической кинетике. М. : Наука, 1988. 345 с.

**СГЛАЖИВАНИЕ БОЛЬШОГО КОЛИЧЕСТВА
ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ
В СРЕДНЕИНТЕГРАЛЬНОМ СМЫСЛЕ С ПОМОЩЬЮ
МЕТОДА НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ**

Дарья Владимировна Папшева

Пензенский государственный университет, Пенза, Россия
papsevadara30@gmail.com

Аннотация. Рассмотрен метод наименьших квадратов. Исследуются особенности применения метода наименьших квадратов для сглаживания экспериментальных данных. Представлены численные результаты, а также проведен их анализ.

Ключевые слова: сглаживание, метод наименьших квадратов

**SMOOTHING A LARGE AMOUNT OF EXPERIMENTAL DATA
IN THE MEAN INTEGRAL SENSE USING
THE LEAST SQUARES .**

Daria V. Papsheva

Penza State University, Penza, Russia
papsevadara30@gmail.com

Abstract. The least squares method is considered in the article. The features of using the least squares method for smoothing experimental data are investigated. Numerical results are presented and their analysis is carried out.

Keywords: smoothing, the least squares method

1. Постановка задачи

Метод наименьших квадратов (МНК) – это статистическая процедура для довольно точного прогнозирования поведения зависимых переменных.

Метод наименьших квадратов широко используют для обработки экспериментальных кривых, точки которых измерены с заменой погрешности ε . В этом случае весу ρ_i придают смысл точности измерения данной точки: чем выше точность, тем больше значение веса приписывают точке [1]. Аппроксимирующая кривая будет проходить ближе к точкам с большим весом. Сходные соображения используют в математической постановке задачи: выбирают весовую функцию $\rho(x)$

большой при тех значениях аргумента, где нужно получить более высокую локальную точность аппроксимации.

Если число коэффициентов аппроксимации n взять равным числу узлов N , то среднеквадратичная аппроксимация совпадает с лагранжевой интерполяцией [2]. Очевидно, при наличии значительных ошибок эксперимента интерполяция неразумна. Поскольку при $n \approx N$ среднеквадратичная аппроксимация близка к интерполяции, то хорошее сглаживание ошибок эксперимента будет при $n < N$; но если n слишком мало, то для описания сложной кривой коэффициентов может не хватить. Должно существовать какое-то оптимальное число коэффициентов; оно зависит от функции $y(x)$, числа узлов N , их расположения, весов и от выбранной системы $\varphi_k(x)$.

Оптимальное число коэффициентов определяют следующим образом. Выбирают некоторое n , находят из условия соответствующие коэффициенты $a_k^{(n)}$, $1 \leq k \leq n$, вычисляют полученное при этом среднеквадратичное отклонение δ_n и сравнивают его с известной погрешностью эксперимента. Если $\delta_n > \varepsilon$, т.е. математическая погрешность аппроксимации много больше физической погрешности исходных данных, то число коэффициентов недостаточно для описания $y(x)$, и надо увеличить n . Если $\delta_n < \varepsilon$, то старшие коэффициенты аппроксимации физически недостоверны, и надо уменьшить n . Если $\delta_n \approx \varepsilon$, то число коэффициентов оптимально.

Обычно начинают расчет с $n = 1$, когда наверняка $\delta_1 < \varepsilon$, и увеличивают число коэффициентов до тех пор, пока не выполнится условие $\delta_n \approx \varepsilon$. Если при этом $n < N$, то вид аппроксимирующей функции выбран удачно. Если же $n_{\text{опт}} \sim N$, то следует поискать более подходящий вид аппроксимирующей функции.

Применение метода наименьших квадратов для сглаживания экспериментальных данных в среднеинтегральном смысле.

Пусть производится опыт, целью которого является исследование зависимости некоторой физической величины y от физической величины x (например, зависимости пути, пройденного его телом, от времени; начальной скорости снаряда от температуры заряда; подъёмной силы от угла атаки и т.д.). Предполагается, что величины x и y связаны функциональной зависимостью:

$$y = \varphi(x) \quad (1)$$

Вид этой зависимости и требуется определить из опыта.

Очень часто бывает так, что вид зависимости (линейная, квадратичная, показательная и т.д.) бывает известен из физических соображений, связанных с существом решаемой задачи, а из опыта требуется установить только некоторые параметры этой зависимости.

Пусть имеются результаты n независимых опытов, оформленные в виде простой статистической таблицы.

Из теоретических или иных соображений выбран принципиальный вид зависимости $y = \varphi(x)$. Функция $y = \varphi(x)$ содержит ряд числовых параметров $a, b, c \dots$. Требуется так выбрать эти параметры, чтобы кривая $y = \varphi(x)$ в каком-то смысле наилучшим образом изображала зависимость, полученную в опыте.

Решение этой задачи, как и любой задачи выравнивания или сглаживания зависит от того, что именно мы условимся считать «наилучшим». Можно, например, считать «наилучшим» такое взаимное расположение кривой и экспериментальных точек, при котором максимальное расстояние между ними обращается в минимум; можно потребовать, чтобы в минимум обращалась сумма абсолютных величин отклонений точек от кривой и т.д. При каждом из этих требований мы получим своё решение задачи, свои значения параметров $a, b, c \dots$

Однако общепринятым при решении подобных задач является так называемый метод наименьших квадратов, при котором требование наилучшего согласования кривой $y = \varphi(x)$ и экспериментальных точек сводится к тому, чтобы сумма квадратов отклонений экспериментальных точек от сглаживающей кривой обращалась в минимум. Метод наименьших квадратов имеет перед другими методами сглаживания существенные преимущества: во-первых, он приводит к сравнительно простому математическому способу определения параметров $a, b, c \dots$; во-вторых, он допускает довольно веское теоретическое обоснование с вероятной точки зрения.

Перейдём к задаче определения параметров $a, b, c \dots$, исходя из принципа наименьших квадратов. Пусть имеется таблица экспериментальных данных (табл. 1) и пусть из каких-то соображений (связанных с существом явления или просто с внешним видом наблюдаемой зависимости) выбран общий вид функции $y = \varphi(x)$, зависящей от нескольких числовых параметров $a, b, c \dots$; именно эти параметры и требуется выбрать согласно методу наименьших квадратов так, чтобы сумма квадратов отклонений y_i от $\varphi(x_i)$ была минимальна. Запишем y как функцию не только аргумента x , но и параметров $a, b, c \dots$:

$$y = \varphi(x; a, b, c, \dots) \quad (2)$$

Требуется выбрать $a, b, c, \dots$ так, чтобы выполнялось условие:

$$\sum_{i=1}^n [y_i - \varphi(x_i; a, b, c, \dots)]^2 = \min. \quad (3)$$

Найдём значения $a, b, c, \dots$, обращающие левую часть выражения (3) в минимум. Для этого продифференцируем её по $a, b, c, \dots$ и приравняем производные нулю:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n [y_i - \varphi(x_i; a, b, c, \dots)] \left(\frac{\partial \varphi}{\partial a}\right)_i = 0. \\ \sum_{i=1}^n [y_i - \varphi(x_i; a, b, c, \dots)] \left(\frac{\partial \varphi}{\partial b}\right)_i = 0. \\ \sum_{i=1}^n [y_i - \varphi(x_i; a, b, c, \dots)] \left(\frac{\partial \varphi}{\partial c}\right)_i = 0. \end{cases} \quad (4)$$

где $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial a}\right)_i = \varphi'_a(x_i; a, b, c, \dots)$ – значение частной производной функции φ по параметру a в точке x_i ; $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial b}\right)_i, \left(\frac{\partial \varphi}{\partial c}\right)_i, \dots$ – аналогично.

Система уравнений (4) содержит столько же уравнений, сколько неизвестных $a, b, c, \dots$

Решить систему (4) в общем виде нельзя, для этого необходимо задаться конкретным видом функции φ .

2. Приведем результаты работы метода наименьших квадратов:

З а д а ч а 1. Для функции $7e^{-\frac{1}{3}x} * \cos(5 * (x - 1)) + 5$

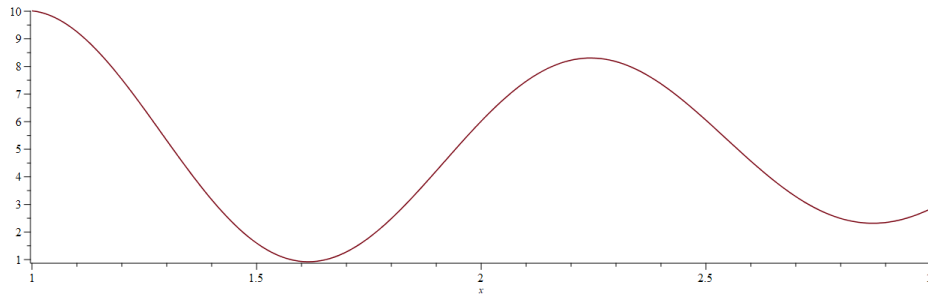


Рис. 1. График функции задачи 1

Приближение:

```
tmp := -2.42038275804098*exp(-
4.13575109615673*t)*sin(8.07823981254627*t-
47.8956064431706)+4.91027857686231
tmp2 := -464.577358636139+1523.26425502151*t-
1843.99182474381*t^2+1050.13192755984*t^3 -283.707906273636*t^4
+29.3076045223549*t^5
```

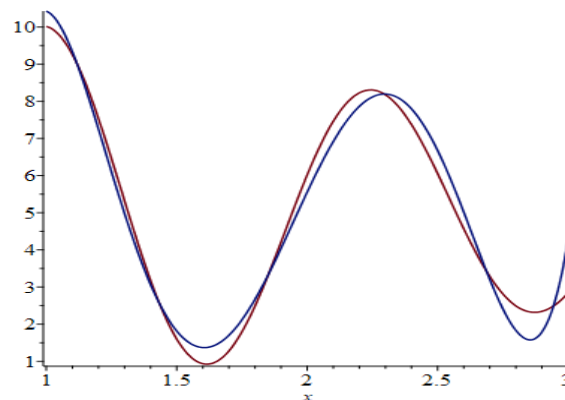


Рис. 2. Иллюстрация аппроксимации для задачи 1

З а д а ч а 2. Для функции $4 \cos(4x - 4) + 5$

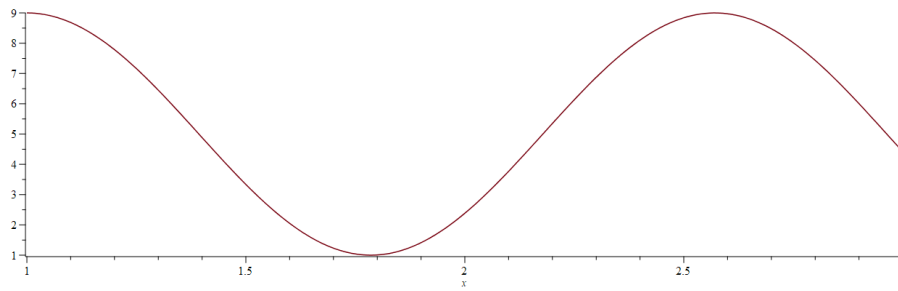


Рис. 3. График функции задачи 2

Приближение:

```
tmp := -3.99999999971794*sin(4.00000000002206*t-  
11.8539816339740)+4.9999999999227  
tmp2 := -390.334145609799+1152.28301793198*t-  
1252.37434650460*t2+637.892175482039*t3-  
153.422210057382*t4+14.0457876084894*t5
```

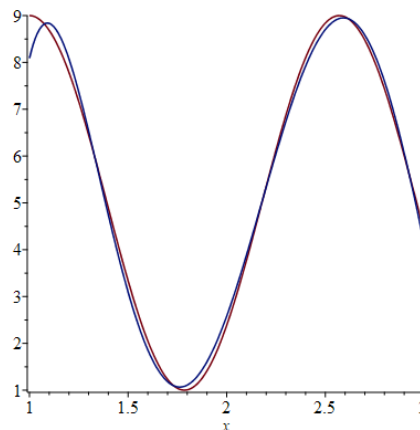


Рис. 4. Иллюстрация аппроксимации для задачи 2

Выше приведены вычисленные с помощью метода наименьших квадратов параметры функций, дающие достаточно хорошее приближение исходных данных (полученных с помощью случайного зашумления исходной функции в пределах величины $\delta = 0.001$ по 100 точкам). Следует отметить, что влияние случайных искажений сказывается на точности аппроксимации тем сильнее, чем меньше величина δ .

Список литературы

1. Вентцель Е. С. Теория вероятностей : учебник для вузов. 6-е изд., стер. М. : Высш. шк., 1999. 576 с.
2. Калиткин Н. Н. Численные методы. М. : Наука, 1978. 512 с.

ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ И ВРЕДНЫЕ ПРИВЫЧКИ

Алексей Сергеевич Паршин¹, Полина Григорьевна Пичугина²

^{1,2} Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

¹ Alexpar2003@gmail.com, ² polinapichugina@yandex.ru

Аннотация. Приведены математически обоснованные аргументы вреда здоровью от пассивного курения.

Ключевые слова: пассивное курение, параметрические методы, однофакторный дисперсионный анализ

ANALYSIS OF VARIANCE AND BAD HABITS

Alexey S. Parshin¹, Polina G. Pichugina²

^{1,2} Penza State University, Penza, Russia

¹ Alexpar2003@gmail.com, ² polinapichugina@yandex.ru

Abstract. Mathematically justified arguments of harm to health from passive smoking are given.

Keywords: passive smoking, parametric methods, one-factor analysis of variance

В практической деятельности в различных областях науки мы часто сталкиваемся с необходимостью оценить влияние различных факторов на те или иные показатели. Часто эти факторы имеют качественный характер и тогда дисперсионный анализ приобретает особую ценность, так как становится единственным статистическим способом исследования, дающим такую оценку.

Дисперсионный анализ как метод исследования появился в работах Р. Фишера (1918–1935) в связи с исследованиями в сельском хозяйстве для выявления условий, при которых испытываемый сорт сельскохозяйственной культуры даёт максимальный урожай (в агрономических исследованиях первый фактор – сорт почвы, второй фактор – способ обработки). Дисперсионный анализ позволяет ответить на вопрос о наличии существенного влияния некоторых факторов на изменчивость фактора, значения которого могут быть получены в результате опыта.

Курение считают основным фактором, предрасполагающим к хроническим заболеваниям легких. Но, как правило, заядлый курильщик считает, что это вредное пристрастие является его личным делом,

совершенно забывая об окружающих людях. А ведь табачный дым не только вдыхается курильщиком, он также поступает в окружающий воздух. Пассивное курение – это непроизвольное вдыхание воздуха, содержащего табачный дым. При пассивном курении происходит такое же отравление организма никотином, окисью углерода и другими вредными веществами, как и при обычном курении. Медицинские исследования показывают, что пассивные курильщики рискуют заболеть такими же серьёзными заболеваниями, как и активные.

Вред пассивного курения мы предложили студентам проверить с помощью математики. А точнее, с помощью дисперсионного анализа. В статистике существует множество методов оценки статистической значимости различий результатов наблюдений над некоторой интересующей нас случайной величиной (их называют *критериями значимости*), но все они построены по одному принципу. Сначала формулируется *нулевая гипотеза*, то есть предполагается, что исследуемые факторы не оказывают никакого влияния на исследуемую величину и полученные различия случайны. Затем определяется, какова вероятность получить наблюдаемые различия при условии справедливости нулевой гипотезы. Если эта вероятность мала, то нулевая гипотеза отвергается и считается, что результаты эксперимента статистически значимы.

Для характеристики состояния дыхательных путей мы выбрали один из показателей функции внешнего дыхания – максимальную объемную скорость середины выдоха, которую измеряли во время профилактического осмотра сотрудников. Уменьшение этого показателя – признак нарушения проходимости дыхательных путей. Для исследования взяли 200 человек, которых поделили на 5 групп ($m = 5$) по 40 человек в каждой ($n = 40$). В первую группу вошли работающие в помещении, где не курят, во вторую – работающие в накурленном помещении, в третью – выкуривающие небольшое число сигарет, в четвертую – выкуривающие среднее число сигарет, в пятую – выкуривающие большое число сигарет. В табл. 1 представлена средняя объемная скорость середины выдоха в каждой из групп и среднее квадратическое отклонение для каждой группы.

Из таблицы видно, что средние объемные скорости в разных группах различны. Выясним с помощью однофакторного дисперсионного анализа: можно ли отнести различия в группах на счет случайности? (Нулевая гипотеза: максимальная объемная скорость середины выдоха одинакова во всех группах). Воспользуемся одним из параметрических критериев, основанном на оценке дисперсии (вообще говоря, все критерии, основанные на оценке параметров распределения, называются параметрическими).

Таблица 1

Группа		Максимальная объемная скорость середины выдоха, л/с		
		Число обследованных	Среднее	Стандартное отклонение
Некурящие				
	работающие в помещении, где не курят	40	3,17	0,74
	работающие в накурённом помещении	40	2,72	0,71
Курящие				
	выкуривающие небольшое число сигарет	40	2,63	0,73
	выкуривающие среднее число сигарет	40	2,29	0,7
	выкуривающие большое число сигарет	40	2,12	0,72

Вычислим сначала внутригрупповую дисперсию как среднюю дисперсий выделенных групп:

$$S_{\text{вну}}^2 = \frac{1}{5}(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + S_4^2 + S_5^2) = \frac{1}{5}(0,74^2 + 0,71^2 + 0,73^2 + 0,7^2 + 0,72^2) = 0,5186.$$

Чтобы оценить межгрупповую дисперсию, найдем среднее пяти выборочных средних:

$$\bar{X} = \frac{1}{5}(X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5) =$$

$$\frac{1}{5}(3,17 + 2,72 + 2,63 + 2,29 + 2,12) = 2,586.$$

Следовательно, стандартное отклонение равно:

$$S_{\bar{X}} = \sqrt{\frac{(X_1 - \bar{X})^2 + (X_2 - \bar{X})^2 + (X_3 - \bar{X})^2 + (X_4 - \bar{X})^2 + (X_5 - \bar{X})^2}{m - 1}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(3,17 - 2,59)^2 + (2,72 - 2,59)^2 + (2,63 - 2,59)^2 + (2,29 - 2,59)^2 + (2,12 - 2,59)^2}{5 - 1}} =$$

$$= 0,41.$$

И, наконец, межгрупповая дисперсия равна

$$S_{\text{меж}}^2 = nS_{\bar{X}}^2 = 40 \cdot 0,41^2 = 6,724.$$

Если верна нулевая гипотеза, то как внутригрупповая, так и межгрупповая дисперсии, служат оценками одной и той же дисперсии

и должны быть примерно равны. В противном случае нулевая гипотеза отвергается, то есть маловероятно, что получились бы такие различия между группами, если бы они были просто пятью случайными выборками из одной нормально распределенной совокупности. Исходя

из этого, вычисляем критерий $F = \frac{S_{\text{меж}}^2}{S_{\text{вну}}^2} = 12,97$.

Число степеней свободы: $v_{\text{меж}} = m - 1 = 4$, $v_{\text{вну}} = m(n - 1) = 195$. Сравнивая критическое значение $F_{\text{критич}} = 3,32$ (найденное из таблицы) при уровне значимости $\alpha = 0,01$ видим, что оно значительно меньше полученного $F = 12,97$. Таким образом, нулевая гипотеза отклоняется, а значит различия между группами статистически значимы (вероятность того, что различия между группами случайны, не превышает 1 %). Теперь мы сами убедились, что пассивное курение оказывает негативное, опасное влияние на все органы и системы человека.

Для защиты от пассивного курения, считаем необходимым в средствах массовой информации ставить видеоролики о последствиях курения, в том числе и пассивного, для формирования у некурящего населения нетерпимое отношение к пассивному курению как посягательство на здоровье людей.

Список литературы

1. Гланц С. Медико-биологическая статистика / пер. с англ. М. : Практика, 1998. 459 с.
2. Родионов М. А., Купряшина Л. А., Пичугина П. Г. Пути обеспечения рационального сочетания традиционных и компьютерно ориентированных методических подходов в профессиональной подготовке студентов вузов : монография. Пенза : Изд-во ПГУ, 2015. 188 с.

ПРИМЕНЕНИЕ ЧИСЛЕННОГО МЕТОДА ЭЙЛЕРА В ЗАДАЧАХ РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

*Александр Александрович Почивалов¹,
Лилия Александровна Купряшина²*

^{1,2} Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

¹ pocivalovsana@gmail.com, ² liliya_sl@mail.ru

Аннотация. Показано применение метода Эйлера и его модификаций для решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Приводятся практические примеры и обсуждаются особенности метода.

Ключевые слова: численные методы, метод Эйлера, обыкновенное дифференциальное уравнение

APPLICATION OF THE NUMERICAL EULER METHOD IN PROBLEMS OF SOLVING ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

Aleksandr A. Pochivalov¹, Liliya A. Kupriashina²

^{1,2} Penza State University, Penza, Russia

¹ pocivalovsana@gmail.com, ² liliya_sl@mail.ru

Abstract. The paper shows the application of the Euler method and its modifications for solving ordinary differential equations. Practical examples are given and the specifics of the method are discussed.

Keywords: numerical methods, Euler's method, ordinary differential equation

Дифференциальные уравнения широко используются как аппарат математического моделирования различных объектов и явлений окружающего мира. Активно дифференциальные уравнения используются и в задачах управления.

Решение дифференциальных уравнений является одной из важнейших математических задач. В вычислительной математике изучаются численные методы решения дифференциальных уравнений, которые особенно эффективны в сочетании с использованием вычислительной техники.

Методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений можно разбить на следующие группы: графические, аналитические, приближенные и численные.

Известные методы точного интегрирования дифференциальных уравнений позволяют найти решение в виде аналитической функции, однако эти методы применимы для очень ограниченного класса уравнений. Большинство уравнений, встречающихся при решении практических задач нельзя проинтегрировать с помощью этих методов.

В таких случаях используются численные методы решения, которые представляют решение дифференциального уравнения не в виде аналитической функции, а в виде таблиц значений искомой функции в зависимости от значения переменной.

Существует несколько методов численного интегрирования дифференциальных уравнений, которые отличаются друг от друга по сложности вычислений и точности результата. Рассмотрим, в частности, метод Эйлера [1].

Метод Эйлера

Известно, что уравнение $y' = f(x, y)$ задает в некоторой области поле направлений. Решение этого уравнения с некоторыми начальными условиями дает кривую, которая касается поля направлений в любой точке.

Если взять последовательность точек $x_0, x_1, x_2, \dots$ и заменить на получившихся отрезках интегральную кривую на отрезки касательных к ней, то получим ломаную линию.

При подстановке заданных начальных условий (x_0, y_0) в дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ получаем угловой коэффициент касательной к интегральной кривой в начальной точке $\operatorname{tg} \alpha_0 = y' = f(x_0, y_0)$.

Заменив на отрезке $[x_0, x_1]$ интегральную кривую на касательную к ней, получаем значение $y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0)$. Производя аналогичную операцию для отрезка $[x_1, x_2]$, получаем: $y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)(x_2 - x_1)$.

Продолжая подобные действия далее, получаем ломаную кривую, которая называется **ломаной Эйлера** (рис. 1).

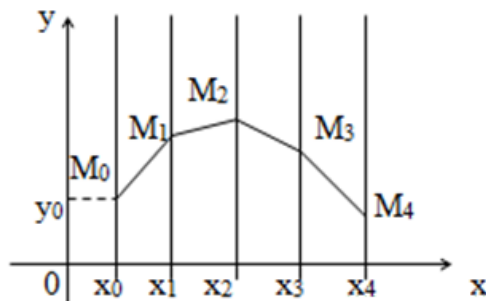


Рис. 1

Можно записать общую формулу вычислений:

$$y_n = y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1})(x_n - x_{n-1}). \quad (1)$$

Если последовательность точек x_i выбрать так, чтобы они отстояли друг от друга на одинаковое расстояние h , называемое шагом вычисления, то получаем формулу:

$$y_n = y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1})h. \quad (2)$$

Следует отметить, что точность метода Эйлера относительно невысока. Увеличить точность можно, конечно, уменьшив шаг вычислений, однако, это приведет к усложнению расчетов. Поэтому на практике применяется так называемый **уточненный метод Эйлера** или **формула пересчета**.

Суть метода состоит в том, что в формуле $y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)h$ вместо значения $y'_0 = f(x_0, y_0)$ берется среднее арифметическое значений $f(x_0, y_0)$ и $f(x_1, y_1)$. Тогда уточненное значение:

$$y_1^{(1)} = y_0 + \frac{f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1)}{2}h; \quad (3)$$

Затем находится значение производной в точке $(x_1, y_1^{(1)})$. Заменяя $f(x_0, y_0)$ средним арифметическим значений $f(x_0, y_0)$ и $f(x_1, y_1^{(1)})$, находят второе уточненное значение y_1 .

$$y_1^{(2)} = y_0 + \frac{f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1^{(1)})}{2}h;$$

Затем третье:

$$y_1^{(3)} = y_0 + \frac{f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1^{(2)})}{2}h; \quad (4)$$

и т.д. пока два последовательных уточненных значения не совпадут в пределах заданной степени точности. Тогда это значение принимается за ординату точки M_1 ломаной Эйлера.

Аналогичная операция производится для остальных значений y .

Построенный алгоритм называется методом Эйлера. Разностная схема этого метода представлена соотношениями. Они имеют вид рекуррентных формул, с помощью которых значение сеточной функции y_{i+1} в любом узле x_{i+1} вычисляется по ее значению y_i в предыдущем узле x_i . В связи с этим метод Эйлера относится к одношаговым методам.

Метод Эйлера имеет первый порядок точности и вопрос о погрешности данного метода можно проследить в работе [2].

Особенности метода Эйлера

Метод очень прост в реализации, но обладает малой точностью, поскольку погрешность каждого нового шага систематически возрастает. Существует модификации метода, повышающие его точность, – методы Эйлера-Коши – первая и вторая улучшенные формулы.

Первая улучшенная формула Эйлера

Пусть дано дифференциальное уравнение:

$$y' = f(x, y) \quad (5)$$

с начальными условиями:

$$y(x_0) = y_0. \quad (6)$$

Решение в каждой точке x_i определяется по формуле:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_{i+1/2}, y_{i+1/2}),$$

где $x_{i+1/2} = x_i + h/2$, $y_{i+1/2} = y_i + f(x_i, y_i) \cdot h/2$.

Геометрически это означает, что отрезок ломанная между точками M_i, M_{i+1} заменяется на два отрезка $|M_i, M_{i+1/2}|, |M_{i+1/2}, M_{i+1}|$. Направление первого отрезка совпадает с направлением интегральной кривой в точке (x_i, y_i) , а направление второго отрезка определяется направлением, интегральной кривой в вспомогательной точке $(x_{i+1/2}, y_{i+1/2})$.

Вторая улучшенная формула Эйлера

Пусть дано дифференциальное уравнение (5) с начальными условиями (6). Решение в каждой точке определяется по формуле:

$$y_{i+1} = y_i + h \frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}^v, y_{i+1}^v)}{2},$$

где $x_{i+1}^v = x_i + h$, $y_{i+1}^v = y_i + hf(x_i, y_i)$.

Геометрически это означает, что определяется направление интегральной кривой в исходной точке и во вспомогательной точке (x_{i+1}, y_{i+1}) , а в качестве окончательного направления ломаной берется среднее этих направлений.

Пример. С помощью метода Эйлера найти значения решения уравнения $y' = y + x^2$ удовлетворяющего условию $y(0) = 1$, в первых пяти точках отрезка $[0; 0,5]$ при $h = 0,1$.

Решение. Строим сетку $x_0 = 0$; $x_1 = 0,1$; $x_2 = 0,2$; $x_3 = 0,3$; $x_4 = 0,4$; $x_5 = 0,5$. Далее находим значения искомой функции $y = y(x)$ удовлетворяющей условиям данной задачи Коши: приближенные значения y_k в точках $x_k = x_0 + kh$ вычисляются по формуле

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k), \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n). \quad (7)$$

Результаты вычислений отражены в табл. 1.

Таблица 1

k	x_k	x_k^2	y_k	$f(x_k, y_k) = y_k + x_k^2$	$hf(x_k, y_k) = 0,1(y_k + x_k^2)$	$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k)$
0	0	0	1	1	0,1	1,1
1	0,1	0,01	1,1	1,1	0,111	1,211
2	0,2	0,04	1,211	1,251	0,1251	1,3361
3	0,3	0,09	1,3361	1,4261	0,1426	1,4787
4	0,4	0,16	1,4787	1,6387	0,1639	1,6426

З а м е ч а н и е. Точное решение уравнения $y' = y + x^2$ удовлетворяющее условию $y(0)=1$, выражается формулой $y = 3e^x - x^2 - 2x - 2$. Следовательно, $y(0,4) = 3e^{0,4} - (0,4)^2 - 2 = 1,5154$.

Список литературы

1. Пименов В. Г., Ложников А. Б. Численные методы : учеб. пособие / науч. ред. Ю. А. Меленцова : в 2 ч. Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2014. Ч. 2. 106 с.
2. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы. М. : Наука, 1989. 432 с.

ПРИМЕНЕНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ ДЛЯ ОБЕСПЕЧЕНИЯ БЕЗОПАСНОСТИ АВТОМАТИЗИРОВАННЫХ СИСТЕМ

*Наталья Валентиновна Мойко¹,
Наталья Васильевна Зверовщикова²,
Елена Дмитриевна Рыжманова³*

^{1,2,3} Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

¹ nataliyavalentinovna@yandex.ru, ² nvz.matematika@yandex.ru,

³ elenaryzhik2@gmail.com

Аннотация. Рассматривается применение статистических методов для обеспечения безопасности автоматизированных систем. Описываются основные понятия и определения в области статистики и безопасности, а также методы статистического анализа данных. Приводятся примеры использования статистических методов для выявления угроз и аномалий в работе автоматизированных систем. Подчеркивается важность применения статистических методов для обеспечения безопасности систем в условиях быстрого развития технологий и увеличения количества кибератак.

Ключевые слова: анализ данных, статистические модели, управление рисками

APPLICATION OF STATISTICAL METHODS TO ENSURE THE SAFETY OF AUTOMATED SYSTEMS

*Natalia V. Moiko¹, Natalia V. Zverovshchikova²,
Elena D. Ryzhmanova³*

^{1,2,3} Penza State University, Penza, Russia

¹ nataliyavalentinovna@yandex.ru, ² nvz.matematika@yandex.ru,

³ elenaryzhik2@gmail.com

Abstract. Examines the application of statistical methods to ensure the security of automated systems. describes the basic concepts and definitions in the field of statistics and security, as well as methods of statistical data analysis. Examples are given of the use of statistical methods to identify threats and anomalies in the operation of automated systems. The authors emphasize the importance of using statistical methods to ensure the security of systems in the face of rapid technological developments and an increase in the number of cyber attacks.

Keywords: data analysis, statistical models, risk management

Автоматизированные системы играют ключевую роль в современном мире, оказывая значительное влияние на различные аспекты нашей повседневной жизни. Вот некоторые из областей, где автоматизированные системы имеют большое значение: промышленное производство (многие производственные процессы полагаются на автоматизированные системы, такие как роботы и конвейеры, что позволяет увеличивать эффективность, снижает затраты и повышает качество продукции); транспорт (автомобили, поезда, и даже беспилотные дроны становятся все более автоматизированными – это способствует улучшению безопасности и снижению заторов на дорогах); здравоохранение (автоматизированные системы используются в медицинских устройствах, мониторинге пациентов и даже в хирургии – это помогает улучшить точность диагностики и лечения); финансы (банковские и финансовые институты используют автоматизацию для обработки транзакций, анализа данных и управления рисками, что улучшает эффективность и безопасность финансовых операций). Это и домашние устройства, и информационные технологии, сельское хозяйство, образование и многое другое. В целом, автоматизированные системы улучшают нашу жизнь, делая ее более комфортной, эффективной и безопасной. Однако, они также поднимают вопросы о приватности, безопасности и влиянии на рынок труда, которые требуют внимания и регулирования [1, 2].

Автоматизированные системы приносят множество преимуществ, но также сопряжены с рисками и угрозами, включая сбои, ошибки и кибератаки.

- **Сбои и ошибки:**

- технические сбои: аппаратные или программные сбои могут вызвать недоступность или неправильную работу системы, что может повлечь за собой серьезные последствия;

- человеческие ошибки: неправильное использование или настройка автоматизированных систем также может вызвать проблемы.

- **Кибератаки:**

- взлом и хищение данных: злоумышленники могут попытаться взломать систему, чтобы получить доступ к конфиденциальным данным или украсть информацию.

- отказ в обслуживании (DDoS): кибератаки могут направляться на перегрузку сети, что может привести к отказу в обслуживании и недоступности системы.

Мошенничество и вредоносные программы: атаки с использованием вредоносных программ могут нарушить работу системы и нанести финансовый ущерб.

- **Проблемы с приватностью и надежностью:** сбор и анализ больших объемов данных автоматизированными системами может

вызывать опасения с точки зрения приватности и безопасности данных. Низкая надежность системы может привести к утрате доверия со стороны пользователей.

Для снижения рисков и обеспечения безопасности автоматизированных систем необходимы соответствующие меры защиты: кибербезопасность, обучение и сертификация персонала, резервное копирование и восстановление данных, политика доступа и приватности.

Риски всегда присутствуют, и не существует абсолютно надежной системы. Однако с правильными мерами предосторожности и управления рисками можно существенно снизить вероятность возникновения сбоев, ошибок и кибератак в автоматизированных системах. Для обеспечения безопасности автоматизированных систем, в том числе, применяют статистические методы.

Оценка рисков, связанных с безопасностью автоматизированных систем

– Анализ данных о безопасности. Собранные данные о инцидентах безопасности и нарушениях могут быть проанализированы статистически. Это позволит определить общие тенденции, частоту инцидентов, а также наиболее уязвимые компоненты системы. На основе этого анализа можно выявить основные угрозы и риски.

– Моделирование угроз. Статистические методы, такие как статистические модели временных рядов или модели регрессии, могут использоваться для предсказания будущих угроз безопасности. Это позволяет системе более эффективно адаптироваться к новым угрозам и принимать соответствующие меры.

– Оценка вероятности инцидентов. С использованием статистических методов можно определить вероятность возникновения различных типов инцидентов безопасности.

– Анализ уязвимостей. Статистические методы могут использоваться для анализа уязвимостей в системе. Например, можно проводить статистический анализ кода программы, чтобы выявить типичные ошибки и уязвимости.

– Мониторинг и обнаружение инцидентов. Статистические методы могут быть применены для мониторинга системы и обнаружения аномальных событий, которые могут свидетельствовать о возможных инцидентах безопасности.

– Оценка эффективности мер безопасности. С помощью статистических методов можно оценить эффективность применяемых мер безопасности. Например, можно провести статистический анализ результатов пентестов или макетных атак.

– Прогнозирование потенциальных угроз. Статистический анализ данных о безопасности может помочь в прогнозировании будущих угроз и разработке стратегии по их предотвращению.

Методы статистического анализа, используемые для обеспечения безопасности автоматизированных систем

1. Z-оценка (Z-score). $Z = (X - \mu) / \sigma$ Этот метод позволяет определить, насколько отклоняется конкретное значение X от среднего значения μ в данных, измеренных в стандартных отклонениях σ . Если Z-оценка превышает определенный порог, можно считать значение аномальным.

2. Дисперсионный анализ (ANOVA). Формула: F-статистика = межгрупповая сумма квадратов / внутригрупповая сумма квадратов. Данный метод позволяет сравнить средние значения между несколькими группами данных и определить, есть ли статистически значимые различия между ними. Если F-статистика превышает заданный пороговый уровень значимости, можно сделать вывод о наличии аномалии.

3. Методы кластерного анализа. Кластерный анализ позволяет группировать данные на основе их сходства или различий. Например, метод k-средних (k-means) помогает разделить данные на заданное количество кластеров путем минимизации среднеквадратического отклонения между точками данных и центроидами кластеров.

4. Методы классификации (например, метод опорных векторов, деревья решений). Классификация позволяет отнести данные к определенным категориям или классам на основе обучающей выборки. Например, можно обучить модель на нормальных данных и затем классифицировать новые значения как нормальные или аномальные на основе их признаков.

Это лишь некоторые из методов, которые могут быть применены для анализа данных и обеспечения безопасности автоматизированных систем.

Примеры применения статистических методов для оценки вероятности возникновения определенной угрозы или потенциального ущерба могут включать: анализ исторических данных, регрессионный анализ, метрики безопасности, моделирование рисков.

Примеры применения статистических методов для оценки вероятности возникновения определенной угрозы или потенциального ущерба

Анализ исторических данных. Собирая и анализируя данные о прошлых инцидентах или угрозах, можно применить статистические методы для оценки вероятности их возникновения в будущем. Например, можно использовать частотный анализ для определения частоты исторических инцидентов и интерполировать это на будущие периоды.

Регрессионный анализ. Если имеются данные о факторах, которые могут влиять на возникновение угрозы или ущерба (например, количество пользователей, тип использованного программного обеспечения

и т.д.), можно применить регрессионный анализ для оценки связи между этими факторами и вероятностью возникновения угрозы или ущерба.

Моделирование рисков. Использование статистических моделей, таких как модели Монте-Карло, может помочь оценить потенциальные угрозы и ущербы путем введения различных сценариев и вероятностей.

Значение статистических методов для обеспечения безопасности автоматизированных систем

Анализ угроз: Статистические методы позволяют проводить анализ угроз на основе данных о предыдущих инцидентах и уязвимостях. Это позволяет выявить паттерны и тренды в угрозах, оценить их вероятность и потенциальный ущерб. Такой анализ помогает разработать эффективные меры безопасности и сосредоточить ресурсы на наиболее значимых угрозах.

Прогнозирование рисков: Статистические методы позволяют прогнозировать возможные риски и уровень угроз в будущем. Используя исторические данные и моделирование, можно определить вероятность возникновения определенных событий и оценить их влияние на безопасность системы. Это помогает принять соответствующие меры предосторожности и планировать мероприятия по обеспечению безопасности заранее.

Оценка эффективности мер безопасности: Статистические методы позволяют оценить эффективность применяемых мер безопасности. Собирая данные о нарушениях безопасности, инцидентах и применяемых контрмерах, можно провести анализ эффективности различных мер и методов. Это помогает определить, какие меры работают наилучшим образом и как можно улучшить общий уровень безопасности.

Принятие обоснованных решений: Статистические методы позволяют принимать обоснованные решения на основе фактических данных и анализа. Вместо принятия решений наугад или на основе предположений, статистические методы обеспечивают объективную основу для принятия решений и позволяют оценить вероятность успеха или провала определенных мер безопасности.

Применение статистических методов позволяет более точно анализировать угрозы, прогнозировать риски, оценивать эффективность мер безопасности и принимать обоснованные решения. Это важно для обеспечения безопасности автоматизированных систем и защиты от потенциальных угроз.

Заключение

Применение статистических методов для анализа данных, получаемых от датчиков и других устройств, играет важную роль в обеспечении

безопасности автоматизированных систем. Статистический анализ таких данных позволяет обнаружить аномалии, подозрительные паттерны или отклонения от нормы. Это может помочь выявить возможные проблемы в работе системы, включая атаки, несанкционированный доступ или неисправности оборудования. Например, можно использовать методы дисперсионного анализа или многомерного статистического анализа для определения статистически значимых различий между нормальным и аномальным поведением датчиков или устройств. Также могут быть применены алгоритмы машинного обучения, такие как кластерный анализ или классификация, для выявления нетипичных событий или поведения. Анализ данных, получаемых от датчиков и других устройств, с использованием статистических методов, помогает обеспечить безопасность автоматизированных систем путем раннего обнаружения потенциальных угроз и проблем. Это также способствует повышению эффективности мониторинга и аналитики данных в целях обеспечения безопасности.

Список литературы

1. Bishop C. M. Pattern Recognition and Machine Learning. Springer, 2006. 738 p.
2. Chawla N. V., Bowyer K. W., Hall L. O., Kegelmeyer W. P. SMOTE: Synthetic Minority Over-sampling Technique // Journal of Artificial Intelligence Research. 2002. Vol. 16. P. 321–357.

ПРИЛОЖЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ О НАГРЕВЕ И ОХЛАЖДЕНИИ ТЕЛ

Илья Викторович Семенов

Пензенский государственный университет, Пенза, Россия
Semenoviliya3007@gmail.com

Аннотация. Исследуется применение дифференциальных уравнений в физических задачах на нагрев и охлаждение.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, физические задачи, производная

APPLICATION OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS TO SOLVING PROBLEMS OF HEATING AND COOLING BODIES

Ilya V. Semenov

Penza State University, Penza, Russia
Semenoviliya3007@gmail.com

Abstract. The application of differential equations in physical problems for heating and cooling is investigated.

Keywords: differential equations, physical problems, derivative

Дифференциальные уравнения – это мощный математический аппарат для описания многих физических процессов и решения прикладных задач.

При соприкосновении тел, имеющих разные температуры, между этими телами происходит теплообмен. С точки зрения молекулярно-кинетической теории, это объясняется так: молекулы более нагретого тела имеют большую кинетическую энергию, чем молекулы тела, менее нагретого. При «столкновениях» молекул соприкасающихся тел происходит процесс выравнивания их средних кинетических энергий. Молекулы более нагретого тела теряют часть своей кинетической энергии, при этом нагретое тело будет остывать. Кинетическая энергия молекул холодного тела возрастает, поэтому температура этого тела будет увеличиваться. В конечном итоге кинетические энергии молекул обоих тел сравняются, и температуры тел станут одинаковыми. На этом теплообмен прекращается.

Энергию, которую тело получает или отдаёт в процессе теплообмена, называют количеством теплоты (Q). Количество теплоты, как и все другие виды энергии, измеряется в системе СИ в Джоулях: $[Q] = \text{Дж}$. (Здесь и в дальнейшем единицы измеряются в системе СИ.)

При нагревании или охлаждении тела количество теплоты, поглощаемое или выделяемое им, рассчитывается по формуле:

$$Q = cm(t_2 - t_1),$$

где m – масса тела, кг; $(t_2 - t_1)$ – разность температур тела, $^{\circ}\text{C}$ (или К); c – удельная теплоёмкость вещества, из которого состоит тело [2].

Задача 1. Тело охладилося за 10 мин от 70 до 40 $^{\circ}\text{C}$. Температура окружающей среды поддерживается равной 25 $^{\circ}\text{C}$. Сколько еще минут понадобится, чтобы тело остыло до 30 $^{\circ}\text{C}$? [1]

Решение. Пусть $T(t)$ – это температура тела в момент времени t , где температура измеряется в градусах Цельсия, а время – в минутах. Тогда по закону Ньютона (25) – это уравнение с разделяющимися переменными.

Решаем его:

$$\frac{dT}{T-25} = -kt, \ln(T-25) = \ln c - kt$$

Из условий $T(0) = 70$ и $T(10) = 40$ и находим, что $c = 45$ и $e^k = 3^{0,1}$ и закон охлаждения приобретает вид $T = 45 \times 0,3^{-0,1t} + 25$. Подставив в этот закон $T = 30$ $^{\circ}\text{C}$, получим $t = 20$ мин. Так как требуется найти время, прошедшее с момента охлаждения тела до 40 $^{\circ}\text{C}$, то окончательный ответ: $20 - 10 = 10$ мин.

Ответ: 10 мин.

Задача 2. Килограмм только что размороженной воды, помещенной в сосуд с хорошей теплоизоляцией, нагревается спиралью, напряжение на которую подается равномерно и к концу десятой минуты достигает 120 В. До какой температуры нагреется вода к этому моменту времени, если при 20 $^{\circ}\text{C}$ сопротивление спирали составляет 20 Ом, а ее температурный коэффициент сопротивления равен $0,004$ $^{\circ}\text{C}^{-1}$.

Решение. Пусть $T(t)$, $U(t)$ и $R(t)$ – это температура воды, напряжение и сопротивление спирали в момент времени t соответственно. Тогда за промежуток времени Δt спираль выделит от $\frac{U^2(t)}{R(t)} \Delta t$ до $\frac{U^2(t+\Delta t)}{R(t+\Delta t)} \Delta t$ джоулей электрической энергии, где $R(t) = 20(1 + 0,004(T(t) - 20)) = 20(0,92 + 0,004T(t))$, и так как за 600 с напряжение равномерно выросло от 0 до 120 В, то $U(t) = \frac{120}{600}t = 0,2t$. С другой стороны, за этот же промежуток времени вода нагреется на $\Delta T = T(t + \Delta t) - T(t)$ градусов Цельсия, а значит, она поглотит $4200\Delta t$ джоулей энергии.

Приравнивание друг другу электрической и тепловой энергии приведет нас к неравенству:

$$\frac{0,04t^2\Delta t}{20(0,92 + 0,004T(t))} < 4200\Delta T < \frac{0,04(t + \Delta t)^2\Delta t}{20(0,92 + 0,004T(t + \Delta t))}$$

откуда, упрощая и переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получим уравнение:

$$2100000(0,92 + 0,004T)dT = t^2 dt$$

Разделив, получим:

$2100000(0,92 + 0,004T)dT = t^2 dt$, и проинтегрировав получим:

$$5796000T + 12600T^2 = t^3 + c$$

Так как изначально имеется только что размороженная вода, то можно считать, что $T(0) = 0$, и значит, $c = 0$. Подставив $t = 600$, найдем, что к истечению десятой минуты вода нагрелась до температуры, удовлетворяющей квадратному уравнению:

$$7T^2 + 3220T - 120000 = 0,$$

Следовательно:

$$T = \frac{10\sqrt{34321}}{7} - 230 = 34,7^\circ\text{C}$$

Ответ: $34,7^\circ\text{C}$.

Список литературы

1. Гриншпон Я. С. Геометрические, физические и экономические задачи, сводящиеся к дифференциальным уравнениям. Томск, 2011. 74 с.
2. Кутателадзе С. С. Основы теории теплообмена. 5-е изд., перераб. и доп. М. : Атомиздат, 1979. 416 с.

ВЕРОЯТНОСТНАЯ ОЦЕНКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ДАННЫХ ПОДВЕРЖЕННОСТИ РАЗЛИЧНЫХ СЛОЕВ НАСЕЛЕНИЯ БОЛЕЗНИ АЛЬЦГЕЙМЕРА

*Наталья Юрьевна Скибицкая¹,
Александра Алексеевна Богатырева²*

^{1,2} Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

¹ natalia.skibitskaya@yandex.ru, ² alya.bogatyreva.27.03.2003@mail.ru

Аннотация. Болезнь Альцгеймера является одним из наиболее распространенных неврологических заболеваний, которое преимущественно прогрессирует с возрастом. Данному заболеванию подвержены различные социальные группы и слои населения. Приведена вероятностная оценка статистических данных подверженности болезни Альцгеймера среди различных социальных групп.

Ключевые слова: болезнь Альцгеймера, статистические данные, различные социальные группы, анализ, статистическая обработка, корреляция Спирмена, критерий χ^2

PROBABILISTIC ASSESSMENT OF STATISTICAL DATA ON THE SUSCEPTIBILITY OF VARIOUS SEGMENTS OF THE POPULATION TO ALZHEIMER'S DISEASE

Natalia Yu. Skibitskaya¹, Alexandra A. Bogatyreva²

^{1,2} Penza State University, Penza, Russia

¹ natalia.skibitskaya@yandex.ru, ² alya.bogatyreva.27.03.2003@mail.ru

Abstract. Alzheimer's disease is one of the most common neurological diseases, which mainly progresses with age. Various social groups and strata of the population are susceptible to this disease. The work is devoted to the probabilistic assessment of statistical data on the susceptibility to Alzheimer's disease among various social groups.

Keywords: Alzheimer's disease, statistical data, various social groups, analysis, statistical processing, Spearman correlation, criterion χ^2

Болезнь Альцгеймера является серьезной неврологической патологией, которая приводит к постепенной деградации мозговой функции, прежде всего, памяти и когнитивных способностей. Современная медицина не стоит на месте, благодаря чему, люди стали жить дольше, чем раньше, доживая до восьмидесяти, девяноста, а порой и ста лет.

В 40–60 % всех случаев причиной деменции является болезнь Альцгеймера. С каждым годом жизни риск возникновения болезни Альцгеймера растет – у людей пенсионного возраста он увеличивается вдвое каждые пять лет. Согласно данным Международной организации по болезни Альцгеймера, в мире у 1 % людей в возрасте 65 лет есть данное заболевание, в возрасте 75 лет – у 10 %, 85 лет – у 20 % людей. На сегодня, 24 миллиона человек страдают болезнью Альцгеймера. Это заболевание является не только социальной, но и экономической проблемой современности. Болезнь Альцгеймера относится к тем немногим в современном мире заболеваниям, для которых не найдены патогномоничные методы диагностики, а соответственно, нет адекватного медикаментозного лечения.

Пожилой возраст является главным фактором риска, что отражается в статистических данных: на каждые пять лет после 65-летнего возраста показатель риска увеличивается примерно в 2 раза, вырастая от 3 случаев в 65 лет до 69 случаев на 1000 человеко-лет к 95 годам. Около 43 % больных болезнью Альцгеймера находятся в возрасте от 75 до 85 лет.

Существуют и половые различия – женщины чаще заболевают болезнью Альцгеймера, в особенности после 85 лет. Сегодня женщины составляют 72 % всех пациентов с болезнью Альцгеймера [1].

В основу работы положены результаты выборочного сравнительного динамического исследования 131 человек, страдающих альцгеймеровской деменцией.

Средний возраст пациентов группы исследования составил 74,9 года. Распределение по полу основной группы: 74,8 % женщин, 25,2 % мужчин. Данные представлены в табл. 1.

Таблица 1

Процентные показатели среди мужчин и женщин

		Частота	Проценты	Процент допустимых	Накопленный процент
Допустимо	ЖЕН	98	74,8	74,8	74,8
	МУЖ	33	25,2	25,2	100,0
	Всего	131	100,0	100,0	

В процессе статистической обработки и анализа материала исследования проводилось дополнительное деление по типам деменций.

Были сформированы подгруппы лиц с деменцией при болезни Альцгеймера с ранним началом (от 45 до 63 лет) – 19 человек, деменции при болезни Альцгеймера с поздним началом (от 64 лет) – 112 человек, полученные данные отражены на рис. 1.

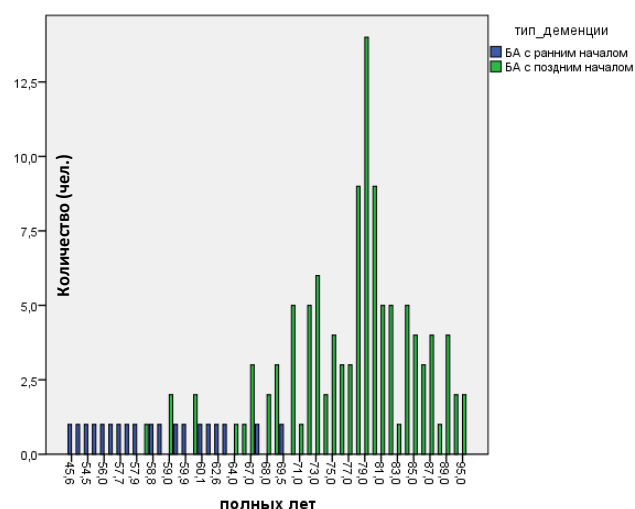


Рис. 1. Возрастные показатели деменции при болезни Альцгеймера

В результате анализа социального статуса участников данного исследования было установлено, что в подгруппе болезнь Альцгеймера с ранним началом развития деменции 21,1 % участников – это пенсионеры по возрасту, 31,6 % – неработающих, 47,4 % – инвалиды I группы. Среди пациентов с болезнью Альцгеймера с поздним началом развития деменции 77,7 % – пенсионеры по возрасту, 0,9 % – инвалиды III группы, 3,6 % – инвалиды II группы, 17,9 % – инвалиды I группы. Численное представление рассмотренных групп показано в табл. 2.

Таблица 2

Комбинационная таблица тип деменции – социальный статус

Тип деменции	Социальный статус					Всего
	пенсионер по возрасту	не работающий (щая)	инвалид 1 группы	инвалид 2 группы	инвалид 3 группы	
БА с ранним началом	4	6	9	0	0	19
БА с поздним началом	88	0	19	4	1	112
Всего	92	6	28	4	1	131

Низкий уровень образования являются фактором риска развития болезни Альцгеймера. Низкая грамотность часто связана с бедностью и низким социально-экономическим статусом, что также сопряжено со слабым здоровьем, снижением доступа к медицинским услугам, а также повышенным риском развития деменции. Данные представлены на рис. 2.

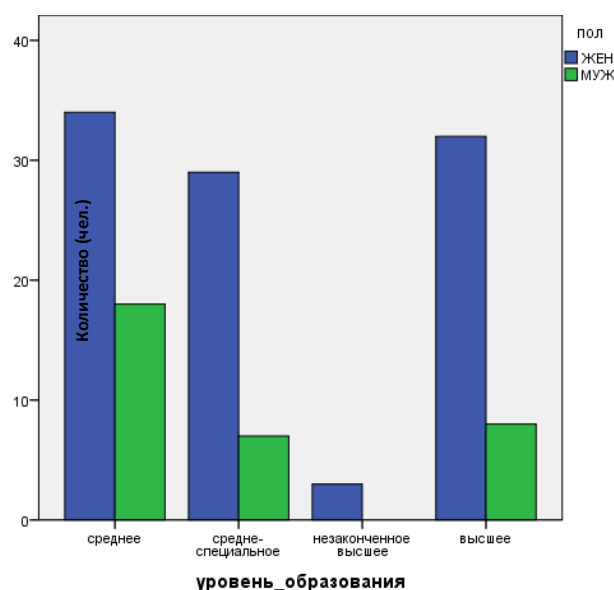


Рис. 2. Уровень образования пациентов с деменцией альцгеймерского типа

Статистическая обработка полученных данных в статье проводилась с использованием статистической компьютерной программы IBM SPSS Statistics. Для проверки значимости различий пары количественных параметрических признаков применялся дисперсионный анализ с расчетом t-критерия Стьюдента по формуле (1). Результат представлен в табл. 3 и 4.

$$t = \frac{X_1^2 - X_2^2}{\sqrt{M_1^2 + M_2^2}} \quad (1)$$

где X_1 и X_2 – средние арифметические значения переменных в группах 1 и 2; M_1 и M_2 – величины средних ошибок.

Таблица 3

Статистика пациентов с деменцией разного типа по уровню образования

	Тип деменции	N	Среднее значение	Стандартное отклонение	Среднекв. ошибка среднего
Уровень образования	БА с ранним началом	19	3,16	1,068	0,245
	БА с поздним началом	112	2,08	1,231	0,116

Таблица 4

Критерий Стьюдента

	Критерий равенства дисперсий Ливиня		t-критерий для равенства средних						
	F	Знач.	t	ст.св.	Знач. (2-х сторонняя)	Разность средних	Среднекв. ошибка разности	95 % доверительный интервал для разности	
								Нижняя	Верхняя
Предполагаются равные дисперсии	0,107	0,744	3,590	129	0,000	1,078	0,300	0,484	1,671
Не предполагаются равные дисперсии			3,973	26,813	0,000	1,078	0,271	0,521	1,634

Для оценки качества корреляционной связи порядковых непараметрических признаков применялся коэффициент ранговой корреляции Спирмена, который рассчитывается согласно формуле (2). Результат представлен в табл. 5. При $r < 0$ связь расценивалась как обратно пропорциональная, при $r > 0$ – прямо пропорциональная связь. При $r < 0,2$ – очень слабая связь, при $r \in [0,2; 0,7]$ – связь средняя, при $r > 0,7$ – связь тесная.

$$r_s = 1 - \frac{6 \cdot \sum_{i=1}^N d_i^2}{N \cdot (N^2 - 1)} \quad (2)$$

где d – разность между рангами по двум переменным для каждого испытуемого; N – количество ранжируемых значений (количество испытуемых).

Таблица 5

Корреляция Спирмена

			Полных лет	Тип деменции
Р _о Спирмана	Полных лет	Коэффициент корреляции	1,000	0,580**
		Знач. (2-х сторонняя)	.	0,000
		N	131	131
	Тип деменции	Коэффициент корреляции	0,580**	1,000
		Знач. (2-х сторонняя)	0,000	.
		N	131	131

**. Корреляция значима на уровне 0,01 (двухсторонняя).

На основе имеющихся данных был проведен анализ (табл. 6) и получен критерий согласия Пирсона – χ^2 (табл. 7), являющийся мерой

отличия непараметрических данных. Критерий χ^2 рассчитывается по формуле (3)

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \frac{(Q_i - E_i)^2}{E_i}, \quad (3)$$

где Q – наблюдаемое число в клетке таблицы сопряженности; E – ожидаемое число в той же клетке таблицы сопряженности.

Таблица 6

Комбинационная таблица возрастная группа – тип деменции

			Тип деменции		Всего
			БА с ранним началом	БА с поздним началом	
Возрастная группа	40–50	Количество	1	0	1
		Ожидаемое количество	0,1	0,9	1,0
		% в Возрастная группа	100,0 %	0,0 %	100,0 %
		% в тип деменции	5,3 %	0,0 %	0,8 %
		% общего итога	0,8 %	0,0 %	0,8 %
		Остаток	0,9	–0,9	
	50–60	Количество	12	5	17
		Ожидаемое количество	2,5	14,5	17,0
		% в Возрастная группа	70,6 %	29,4 %	100,0 %
		% в тип деменции	63,2 %	4,5 %	13,0 %
		% общего итога	9,2 %	3,8 %	13,0 %
		Остаток	9,5	–9,5	
	60–70	Количество	6	15	21
		Ожидаемое количество	3,0	18,0	21,0
		% в Возрастная группа	28,6 %	71,4 %	100,0 %
		% в тип деменции	31,6 %	13,4 %	16,0 %
		% общего итога	4,6 %	11,5 %	16,0 %
		Остаток	3,0	–3,0	
	70–80	Количество	0	56	56
		Ожидаемое количество	8,1	47,9	56,0
		% в Возрастная группа	0,0 %	100,0 %	100,0 %
		% в тип деменции	0,0 %	50,0 %	42,7 %
		% общего итога	0,0 %	42,7 %	42,7 %
		Остаток	–8,1	8,1	
	80–90	Количество	0	34	34
		Ожидаемое количество	4,9	29,1	34,0
		% в Возрастная группа	0,0 %	100,0 %	100,0 %
		% в тип деменции	0,0 %	30,4 %	26,0 %
		% общего итога	0,0 %	26,0 %	26,0 %
		Остаток	–4,9	4,9	

			Тип деменции		Всего
			БА с ранним началом	БА с поздним началом	
	90–100	Количество	0	2	2
		Ожидаемое количество	0,3	1,7	2,0
		% в Возрастная группа	0,0 %	100,0 %	100,0 %
		% в тип деменции	0,0 %	1,8 %	1,5 %
		% общего итога	0,0 %	1,5 %	1,5 %
		Остаток	–0,3	0,3	
Всего		Количество	19	112	131
		Ожидаемое количество	19,0	112,0	131,0
		% в Возрастная группа	14,5 %	85,5 %	100,0 %
		% в тип деменции	100,0 %	100,0 %	100,0 %
		% общего итога	14,5 %	85,5 %	100,0 %

Таблица 7

Критерий χ^2

	Значение	ст.св.	Асимптотическая значимость (2-сторонняя)
Хи-квадрат Пирсона	67,976 ^a	5	0,000
Отношения правдоподобия	62,745	5	0,000
Линейно-линейная связь	52,942	1	0,000
Количество допустимых наблюдений	131		

В результате, используя статистические данные статьи [2], на основе существующих источников [3–6] был проведен анализ полученных показателей для различных социальных групп населения, включая факторы, такие как возраст, пол, образование.

Результаты исследования показали, что болезни Альцгеймера подвержены различные социальные группы. Вероятностная оценка позволила выявить значимые различия в предрасположенности к развитию болезни в зависимости от таких факторов, как возраст и пол.

На основе проведенного исследования можно сделать вывод, что болезнь Альцгеймера имеет неравномерное распространение среди разных социальных групп. Эти результаты могут быть полезны при разработке и реализации мер по профилактике и лечению этого заболевания, а также для оценки здоровья населения в целом.

Список литературы

1. Язуина Н. А., Комлева Ю. К., Салмина А. Б. [и др.]. Эпидемиология болезни Альцгеймера в мире // Неврологический журнал. 2012. № 5. С. 35.

2. Сиденкова А. П. Болезнь Альцгеймера. Клинические типы. Стадии деменции. Структура синдрома. Екатеринбург : УГМА, 2012. 123 с.
3. Гланц С. Медико-биологическая статистика. М. : Практика, 1998. 459 с.
4. Гаврилова С. И. Болезнь Альцгеймера: современные представления о диагностике и терапии // Русский медицинский журнал. 1997. Т. 5, № 20.
5. Современная демография : материалы междунар. семинара. М. : МЗМ ПРФ, 2006. 101 с.
6. Дамулин И. В. Деменции: некоторые аспекты диагностики и лечения. М., 2007. 43 с.

АНАЛИЗ УЯЗВИМОСТИ СОВРЕМЕННЫХ КОМПЬЮТЕРНЫХ СИСТЕМ К АТАКАМ ЧЕРЕЗ USB-ПОРТЫ

Ян Павлович Подольский¹, Анастасия Сергеевна Судьёва²

^{1,2} Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

¹ yan.06090@mail.ru, ² anastasiyasudyova@gmail.com

Аннотация. Представлены исследования, в ходе которых был проведен анализ уязвимостей USB-портов в современных компьютерных системах. Изучены различные типы атак через USB-порты, оценены их потенциальные угрозы для безопасности системы. Результаты исследования могут применяться для улучшения методов защиты компьютерных систем и повышения осведомленности пользователей о возможных угрозах через USB-порты.

Ключевые слова: Universal Serial Bus, RUBBER DUCKY, BASH BUNNY, USBKill

ANALYSIS OF VULNERABILITY OF MODERN COMPUTER SYSTEMS TO ATTACKS VIA USB PORTS

Yan P. Podolsky¹, Anastasia S. Sudyova²

^{1,2} Penza State University, Penza, Russia

¹ yan.06090@mail.ru, ² anastasiyasudyova@gmail.com

Abstract. The article presents studies that analyze vulnerabilities of USB ports in modern computer systems. Various types of attacks via USB ports have been studied, and their potential threats to system security have been assessed. The results of the study can be used to improve the methods of protecting computer systems and increase user awareness of possible threats via USB ports.

Keywords: Universal Serial Bus, RUBBER DUCKY, BASH BUNNY, USBKill

На сегодняшний день USB является неотъемлемой частью компьютерных технологий и используется для подключения различных устройств: от внешних жестких дисков до игровых консолей и смартфонов. Создание USB обозначило новую эру в передаче данных и обмене информацией между устройствами.

История создания Universal Serial Bus (USB) началась в 1994 году, когда компания Intel подошла к решению проблемы, связанной с множеством портов и кабелей, что делало подключение периферийных устройств к компьютеру неудобным. Компания решила разработать технологию, которая позволит одновременно подключать несколько устройств к одному порту на компьютере. В 1995 году Intel

вместе с другими компаниями, включая Microsoft и Compaq, объединили усилия и образовали USB Implementers Forum (USB-IF). USB-IF начал разработку нового стандарта и протокола для Universal Serial Bus. Главной целью было создание простого в использовании интерфейса, который позволит подключать различные устройства, например, мыши и клавиатуры, к компьютеру без необходимости установки драйверов и перезагрузки системы. В 1996 году была представлена первая версия USB 1.0, у которой скорость передачи данных доходила до 1,5 Мбит/с. Однако, она имела ограничения и не получила широкого распространения в начале своего существования.

Важным качеством интерфейса USB перед другими типами портов является функция горячего подключения (hot plug), которая имеет несколько преимуществ, делающих ее важной для использования в различных ситуациях. Горячее подключение представляет собой технологию, которая позволяет пользователям подключать или отключать устройства от компьютера во время его работы без необходимости выключения самого компьютера или перезагрузки ОС. Эта функциональность обеспечивает удобство в использовании.

Одним из существенных отличий Universal Serial Bus (USB) является его невозможность соединения двух устройств на равных правах. Стандарт USB не предусматривает параллельное подключение устройств. Для такого типа подключения используются специальные разветвители, называемые «USB-hub». В USB-соединении роль «главного» выполняет компьютер. «Подчиненными» могут быть различные устройства, такие как принтеры, флеш-накопители, мыши, сканеры, клавиатуры и т.д.

В USB-порту существуют четыре основные линии передачи данных (рис. 1). Линия GND (ground) является нулевым потенциалом и имеет черный провод. Линия питания 5V называется VBUS и обозначается красным проводом. Контакты D+ и D- отвечают за передачу данных. Они передают один и тот же информационный сигнал в виде симметричного соединения. Все кабели USB также обладают экранированием, что обеспечивает высокую защиту от помех.

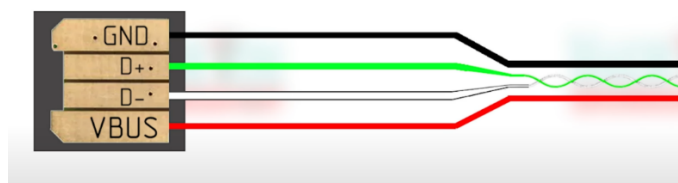


Рис. 1. Сигналы порта USB

Важное достоинство USB – возможность plug-n-play, означающая самостоятельное распознавание типа устройства компьютером, которое осуществляется при помощи кодов классов.

Устройство Rubber ducky имеет различные варианты, которые различаются в зависимости от того, какими возможностями обладает его владелец. Встречаются обычные флешки, с микроконтроллерами, а также флешки, основанные на Arduino-платформе.

В центре функционирования устройства лежит эмуляция клавиатуры с использованием кодов классов. Одно из главных достоинств – способность не вызывать реакции встроенной антивирусной защиты.

Rubber Ducky широко используется в информационной безопасности и пентестинге. Вот несколько примеров, где устройство Rubber Ducky может быть использовано:

1. Социальная инженерия: Rubber Ducky используется для выполнения атак на пользователей компьютера.

2. Пароли и перехват данных: Rubber Ducky используется для автоматического ввода пароля, перехвата данных или запуска эксплойтов.

3. Обучение: Устройство Rubber Ducky может использоваться в образовательных целях для показа уязвимостей компьютерных систем.

4. Автоматизация задач: С помощью Rubber Ducky можно создавать автоматические скрипты, которые выполняют повторяющиеся задачи.

5. Разработка и отладка: Rubber Ducky используется разработчиками ПО и специалистами по информационной безопасности для тестирования и отладки ПО.

Rubber Ducky может быть использован в сфере кибербезопасности, но стоит помнить, что его использование может быть незаконным без разрешения владельца компьютера или системы.

Устройство Bush Bunny представляет собой мини-компьютер, выполненный в виде USB-флешки и предназначенный для проведения атак на целевые компьютеры. Устройство оснащено трехпозиционным переключателем, позволяющим выбрать режим работы при подключении к ПК. Один из вариантов – режим предохранителя, который предназначен для настройки последовательности действий, выполняемых на целевом компьютере. Две другие позиции переключателя могут быть настроены пользователем для проведения специально выбранных атак. Bush Bunny работает на операционной системе Linux, основанной на Debian. Устройство разработано с целью выполнения полезных нагрузок при подключении к целевому компьютеру. Bush Bunny может использоваться для выполнения атак на ОС на базе ядра Linux, на Windows и даже на Android-системы.

Bush Bunny и Rubber ducky могут показаться схожими в своем функционале, однако это не так. Rubber ducky отличается ограниченностью в передаче данных, поскольку он способен передавать информацию только соединенному с ним компьютеру. Bush Bunny имеет

возможность самостоятельно подключаться к сети Wi-Fi или Bluetooth, что значительно затрудняет обнаружение утечки данных.

Устройства USBKill – существует два типа. Первое устройство предназначено для проведения стресс-тестирования аппаратного обеспечения. При подключении питание берется из USB-порта, заряжается во внутренних конденсаторах и разряжается в линии передачи данных, что обычно выводит из строя незащищенное устройство на механическом уровне. Второе устройство представляет собой программный код, который позволяет отслеживать изменения на USB-портах. Существует несколько вариантов запуска данного устройства:

1. Дистанционный запуск: запуск одиночной или непрерывной атаки с помощью специального пульта дистанционного управления на расстоянии до 100 м от устройства.

2. Запуск со смартфона: контроль и запуск одиночных или непрерывных атак с помощью прилагаемого приложения для смартфонов Android и iOS.

3. Синхронизированная атака: планирование даты и времени, когда сработает USB-блокировка. V4 может оставаться в режиме ожидания без питания более 200 дней.

4. Магнитный триггер: активация USBKill с помощью магнита, проведя рукой по устройству.

5. Классический режим: срабатывание режима в тот момент, когда устройство подключено к USB-накопителю.

Главным назначением устройства USB Kill является тестирование устойчивости компьютеров, мобильных устройств и различной другой электроники к высоковольтным разрядам.

Взломщики и хакеры могут использовать USBKill для атак на незащищенные компьютеры и устройства через USB-порты. Подключение такого устройства может вызвать разрушительное воздействие на электронику, вызвав повреждение или полное отключение системы или устройства.

Подводя итог, стоит отметить, что анализ уязвимости современных компьютерных систем к атакам через USB-порты показал важность проблемы, требующей неотложных мер для её предотвращения. USB-порты могут быть уязвимыми к различным видам атак. Один из ключевых факторов уязвимости USB-портов – отсутствие адекватной авторизации и контроля доступа к подключаемым устройствам. Компьютерные системы автоматически доверяют USB-устройствам, позволяя им выполнять различные операции. Это открывает возможность для злоумышленников взять контроль над системой.

Список литературы

1. URL: <https://www.usb.org/defined-class-codes>
2. URL: <https://codeby.net/threads/rubber-ducky-znakomstvo-chast-i.60049/>

АППРОКСИМАЦИЯ ИНТЕГРАЛОВ ПО ПОЛУОСИ

*Алина Вячеславовна Темникова¹,
Елена Владимировна Грозная²*

^{1,2} Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

¹ aline.temnickova@yandex.ru, ² kedrel@mail.ru

Аннотация. Изучается вопрос аппроксимации интегралов на полуоси с помощью квадратурной формулы Гаусса – Лагерра. Приведены оценки погрешности и результаты численных экспериментов.

Ключевые слова: аппроксимация, квадратурная формула, несобственный интеграл

APPROXIMATION OF INTEGRALS ON THE SEMI-AXIS

Alina V. Temnikova¹, Elena V. Groznaya²

^{1,2} Penza State University, Penza, Russia

¹ aline.temnickova@yandex.ru, ² kedrel@mail.ru

Abstract. The paper studies the problem of approximation of integrals on the semi-axis using the quadrature Gauss-Laguerre formula. Error estimates and results of numerical experiments are suggested.

Keywords: approximation, quadrature formula, improper integral

1. Квадратурная формула Гаусса – Лагерра

Одним из стандартных подходов к аппроксимации определенных интегралом является их приближенная замена конечной суммой, называемой квадратурной. В случае бесконечного интервала интегрирования классические квадратурные формулы не подходят в силу невозможности выбора бесконечного количества узлов квадратурной формулы. В связи с этим разработан специальный вид квадратурной формулы наивысшей алгебраической точности, в основе которой лежат нули многочленов, ортогональных с некой весовой функцией на полуоси. Речь идет о квадратурной формуле Гаусса-Лагерра [1]. Она аппроксимирует значения интегралов суммой:

$$\int_0^{\infty} e^{-x} f(x) dx = \sum_{i=1}^n \omega_i f(x_i) + R_n, \quad (1)$$

где e^{-x} – весовая функция интеграла, а x_i – это i -й нуль полинома Лагерра, представленного формулой Родригеса.

$$L_n(x) = \frac{e^x d^n}{n! dx^n} x^n e^{-x}. \quad (2)$$

Весовые коэффициенты ω_i вычисляются по формуле

$$\omega_i = \frac{x_i}{(n+1)^2 [L_{n+1}(x_i)]^2}.$$

Остаточный член:

$$R_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!} f^{(2n)}(\xi), (0 < \xi < \infty).$$

Для сходящегося несобственного интеграла от произвольной функции можно выполнить следующие преобразования:

$$\int_0^\infty f(x) dx = \int_0^\infty f(x) e^x e^{-x} dx = \int_0^\infty g(x) e^{-x} dx,$$

где $g(x) = f(x) e^x$. Далее можно применить квадратурную формулу Гаусса-Лагерра к новой функции $g(x)$.

Полином (2) является решением линейного дифференциального уравнения Лагерра второго порядка

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0.$$

Это уравнение имеет решение, только если n является целым неотрицательным числом [2]. Также существуют обобщенные многочлены Лагерра, которые являются решениями следующего уравнения

$$xy'' + (\alpha + 1 - x)y' + ny = 0,$$

где n , так же как и прежде является целым неотрицательным числом.

Важным свойством полиномов Лагерра является ортогональность, на полуоси $0 < x < \infty$ с весовой функцией $p(x) = e^{-x}$. Именно это свойство позволяет использовать полиномы для построения квадратурной формулы (1).

Также можно отметить, что функции $L_n(x)$ образуют на интервале $0 \leq x < \infty$ ортогональную систему, причем

$$\int_0^\infty e^{-x} L_n(x) L_m(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{при } n \neq m \\ (n!)^2 & \text{при } n = m \end{cases}$$

Квадратурная формула Гаусса-Лагерра также используется для вычисления интеграла на положительной полуоси вида

$$I = \int_0^\infty f(x) e^{-x} dx,$$

т.е. интеграла с весовой функцией $p(x) = e^{-x}$. На полуоси $(0, \infty)$ ортогональны с весом $p(x) = e^{-x}$ полиномы Лагерра

$$L_n = e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}), n = 0, 1, 2, \dots$$

Первые четыре полинома Лагерра имеют вид

$$\begin{aligned} L_0(x) &= 1, L_1(x) = -x + 1, \\ L_2(x) &= x^2 - 4x + 2, L_3(x) = -x^3 + 9x^2 - 18x + 6. \end{aligned}$$

Узлы $x_0, x_1, \dots, x_n$ квадратурной формулы в этом случае выбираются равными корням полинома Лагерра L_{n-1} . Квадратурная формула имеет вид

$$\int_0^{\infty} f(x)e^{-x}dx \approx \sum_{i=0}^n c_i f(x_i).$$

2. Численные примеры

Для иллюстрации применения квадратурной формулы Гаусса-Лагерра рассмотрим несколько интегралов, для которых можно аналитически получить точное значение и оценить погрешность аппроксимации в зависимости от количества узлов квадратурной формулы.

1. Для интеграла $\int_0^{\infty} \sin \frac{x}{2} e^{-3x} dx = \frac{2}{37}$ получены следующие результаты:

Таблица 1

Погрешность аппроксимации интеграла 1

n	ε
2	0.09899385425
3	0.01242500025
4	0.07157802155
5	0.00179697000
6	0.00057246542
7	0.00016861064
8	0.00004633646
9	0.00001188545
10	3.11530×10^{-6}
12	1.0882×10^{-7}
15	$1,65 \times 10^{-9}$

2. Для интеграла $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4+1} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$ результаты приведены в табл. 2.

Таблица 2

Погрешность аппроксимации интеграла 2

n	ε
2	0.293594116
3	0.035496652
4	0.078443674
5	0.088137719
6	0.050411114
7	0.008027106
8	0.018331277
9	0.026476327
10	0.022609393
12	0.004679122
15	0.007103871

3. Для интеграла $\int_0^\infty \frac{\arctg \frac{1}{10}(x) dx}{x^2+1} = \frac{52 \frac{9}{10} \pi \frac{11}{10}}{22}$ имеем следующие результаты аппроксимации (табл. 3):

Таблица 3

Погрешность аппроксимации интеграла 3

n	ε
2	0.061993648
3	0.066319492
4	0.065191946
5	0.057314014
6	0.048075617
7	0.040013055
8	0.033724609
9	0.029021706
10	0.025520131
12	0.020790140
15	0.016513969

Как видно из представленных результатов, инструмент ортогональных многочленов для построения квадратурных формул показывает достаточно хорошую эффективность. При этом погрешность такой аппроксимации существенно зависит от скорости сходимости несобственного интеграла: чем быстрее сходится интеграл, тем точнее работает квадратурная формула.

Список литературы

1. Абрамовиц М. Справочник по специальным функциям / под ред. М. Абрамовица, И. Стигана. М. : Наука, 1979. 717 с.
2. Ильин А. М., Данилин А. Р. Асимптотические методы в анализе. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2009. 248 с.

СИНК-АППРОКСИМАЦИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ НА ОТРЕЗКЕ $[0; \pi]$

Максим Александрович Усачев

Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

u.m.a.2014@yandex.ru

Аннотация. Рассмотрено понятие синк-функции, а также ее математические и аппроксимативные свойства. Приведены оценка погрешности метода и достаточные и необходимые условия сходимости. Представлены численные результаты аппроксимации функций различного вида.

Ключевые слова: аппроксимация, синк-функция, непрерывная функция, сходимость

SINC APPROXIMATION OF CONTINUOUS FUNCTIONS ON THE SEGMENT $[0; \pi]$

Maxim A. Usachev

Penza State University, Penza, Russia

u.m.a.2014@yandex.ru

Abstract. The paper discusses the concept of a sinc-function, its mathematical and approximative properties. An error estimate of the method and sufficient and necessary conditions for convergence are given. The results of approximating various kinds of functions are suggested.

Keywords: approximation, sinc-function, continuous function, convergence

1. Понятие синк-функции

Синк-функция или кардинальный синус – это функция вида $\text{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$. Эта функция не определена при $x = 0$, и, следовательно, нам нужно определить $\text{sinc}(0)$ на основе предела, когда x стремится к 0 [1].

Используя первый замечательный предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, получаем

$$\text{sinc}(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x = 0 \\ \frac{\sin x}{x} & \text{при } x \neq 0 \end{cases}$$

Такая форма записи функции называется ненормированной. В цифровой обработке сигнала и теории связи как правило используется ее нормированная форма:

$$\text{sinc}(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x = 0 \\ \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} & \text{при } x \neq 0 \end{cases}$$

График синк-функции представлен ниже (красным – ненормированная форма, синим – нормированная форма)

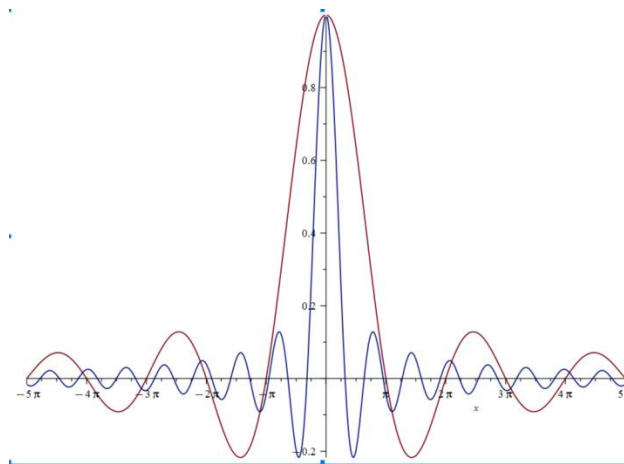


Рис. 1. График синк-функций

Перейдем к рассмотрению синк – функции как к способу аппроксимации функций. Э. Борель и Э. Т. Уиттекер ввели понятие кардинальной функции и усеченной кардинальной функции, сужение на отрезок $[0, \pi]$ которых выглядит так $[1, 2]$:

$$\begin{aligned} L_n(f, x) &= \sum_{k=0}^n \frac{\sin(nx - k\pi)}{nx - k\pi} f\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k \sin nx}{nx - k\pi} f\left(\frac{k\pi}{n}\right) \\ &= \sum_{k=0}^n l_{k,n}(x) f\left(\frac{k\pi}{n}\right) \quad (1) \end{aligned}$$

Синк-приближения нашли широкое применение при построении различных численных методов математической физики и теории приближения функций как одной, так и нескольких переменных, в теории квадратурных формул теории вейвлет-преобразований или всплесков.

На текущий момент использование приближения синками функций, которые убывают по экспоненте на бесконечности, но при этом являются аналитическими на действительной оси, немало освещено. Помимо всего прочего, уже существуют исследования, базирующиеся на теореме Котельникова, которые позволили получить различные

варианты представления целых функций рядами по синкам с узлами интерполирования. В 2007 году А. Ю. Трыниным [3] было проведено исследование, результатом которого стала возможность определения наличия-отсутствия аппроксимативной сходимости в точке конкретно значений операторов. При этом для самой приближаемой функции f нет необходимости ни в чём, кроме непрерывности на $[0, \pi]$, более того, информация о ней может быть ограничена лишь её значениями в узлах $\frac{k\pi}{n}$, принадлежащих окрестности точки, для которой и исследуются аппроксимативные свойства. Помимо всего прочего, был выведен критерий равномерной сходимости операторов для непрерывных функций внутри интервала $(0, \pi)$.

2. Теоретические оценки

Приведем теоретическую оценку точности метода синк-аппроксимации [1–3].

Теорема 1. Для всех $x \in [0; \pi]$ и $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ оценки сверху функций Лебега процесса (1) имеют вид

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n \left| \frac{(-1)^k \sin(nx)}{nx - k\pi} \right| \leq \frac{2}{\pi} |\sin(nx)| (2 + \ln(n+1)) + 1.$$

Сходимость метода сформулируем при помощи следующих теорем.

Теорема 2. (формула равносходимости в точке). Пусть $f \in C[0; \pi]$ и последовательности положительных чисел γ_n и ε_n удовлетворяют соотношениям

$$\gamma_n = O(1), \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\gamma_n}{\omega(f, \frac{\pi}{n})} = 1, \varepsilon_n = \frac{1}{n} \exp\left(-\frac{\gamma_n}{\omega(f, \frac{\pi}{n})} - 1\right) \quad (2)$$

Для любого натурального n и $x \in [0; \pi]$ обозначим через p, m_1, m_2 такие целые числа, что

$$m_1 = \left[\frac{k_1}{2} \right] + 1, m_2 = \left[\frac{k_2}{2} \right], \frac{\pi p}{n} \leq x < \frac{\pi(p+1)}{n}, \quad (3)$$

где числа k_1, k_2 определяются с помощью неравенств:

$$\frac{\pi(k_1-1)}{n} < x - \varepsilon_n \leq \frac{\pi k_1}{n}, \frac{\pi k_2}{n} \leq x + \varepsilon_n < \frac{\pi(k_2+1)}{n}$$

Тогда поточечно на отрезке $[0; \pi]$ и равномерно внутри интервала $(0; \pi)$ справедливо:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| L_n(f, x) - f(x) - \frac{\sin nx}{2\pi} \sum_{m=m_1}^{m_2} \frac{f\left(\frac{\pi(2m+1)}{n}\right) - 2f\left(\frac{\pi(2m)}{n}\right) + f\left(\frac{\pi(2m-1)}{n}\right)}{p - 2m} \right| = 0$$

Замечание. Этот результат является критерием сходимости синк-приближений в точке, так как указывает необходимое и достаточное условие приближение оператором (1) функции f в фиксированной точке.

Пусть $f \in C [0; \pi]$ и последовательности положительных чисел γ_n и ε_n удовлетворяют соотношениям (2). Числа p, m_1, m_2 определяются соотношениями (3). Тогда для того чтобы в точке $x \in [0; \pi]$ выполнялось равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |L_n(f, x) - f(x)| = 0,$$

Необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\sin nx}{2\pi} \sum_{m=m_1}^{m_2} \frac{f\left(\frac{\pi(2m+1)}{n}\right) - 2f\left(\frac{\pi(2m)}{n}\right) + f\left(\frac{\pi(2m-1)}{n}\right)}{p-2m} \right| = 0$$

3. Численные эксперименты

Приведем результаты синк-аппроксимации нескольких функций при различных значениях n .

3.1. Функция $y = \sin(x)$, $x = \frac{\pi}{4}$

Таблица 1

Погрешность для задачи 3.1

N	Точное значение	Прибл. значение	Погрешность
10	0.70710678100	0.7010067436	0.0061000374
21		0.7092201599	0.0021133789
51		0.7068412453	0.0002655357
101		0.7071991554	0.0000923744
201		0.7070834475	0.0000233335
501		0.7071105373	0.0000037563
1001		0.7071058399	0.0000009411

3.2. Функция $y = \cos(x)$, $x = \frac{\pi}{4}$

Таблица 2

Погрешность для задачи 3.2

n	Точное значение	Прибл. значение	Погрешность
10	0.7071067810	0.7783752782	0.0712684972
21		0.6946059845	0.0125007965
51		0.7126842695	0.0055774885
101		0.7042138415	0.0028929395
201		0.7085800375	0.0014732565
501		0.7065109560	0.0005958250
1001		0.7074057879	0.0002990069

3.3. Функция $y = \exp(x)$, $x = 1$

Таблица 3

Погрешность для задачи 3.3

n	Точное значение	Прибл. значение	Погрешность
10	2.7182818280	3.0175625540	0.2992807260
21		2.9590851800	0.2408033520
51		2.7966151590	0.0783333310
101		2.7448301020	0.0265482740
201		2.7164567190	0.0018251090
501		2.7065299500	0.0117518780
1001		2.7237086770	0.0054268490

3.4. Функция $y = |\sin(x)|$, $x = \frac{\pi}{8}$

Таблица 4

Погрешность для задачи 3.4

n	Точное значение	Прибл. значение	Погрешность
10	0.3826834325	0.3924002197	0.0097167872
21		0.3781335852	0.0045498473
51		0.3818796701	0.0008037624
101		0.3824769674	0.0002064651
201		0.3827050686	0.0000216361
501		0.3826750200	0.0000084126
1001		0.3826843056	0.0000008731

3.5. Функция $y = x^2 - \pi x$, $y = \frac{\pi}{7}$

Таблица 5

Погрешность для задачи 3.5

n	Точное значение	Прибл. значение	Погрешность
10	-1.2085229880	-1.2464652630	0.0379422750
21		-1.2038126120	0.0047103760
51		-1.2093104040	0.0007874160
101		-1.2081656860	0.0003573020
201		-1.2084113930	0.0001115950
501		-1.2085408530	0.0000178650
1001		-1.2085210010	0.0000019870

Анализируя погрешность аппроксимации представленных функций, заметим, что для некоторых из них (а именно функций 3.1, 3.4, 3.5) аппроксимативные свойства проявляются более выражено. Проанализировав эти функции, придем к выводу, что они обладают общими свойствами, среди которых:

$$\begin{cases} y(0) = y(\pi) = 0, \\ y' \left(\frac{\pi}{2} \right) = 0. \end{cases}$$

Список источников

1. Трынин А. Ю. Приближение непрерывных на отрезке функций с помощью линейных комбинаций синков // Известия вузов. Математика. 2016. № 3. С. 72–81.
2. Трынин А. Ю. Критерий равномерной сходимости sinc-приближений на отрезке // Известия вузов. Математика. 2008. № 6. С. 66–78.
3. Трынин А. Ю. Оценки функций Лебега и формула Неваи для sinc приближений непрерывных функций на отрезке // Сибирский математический журнал. 2007. Т. 48, № 5. С. 1155–1166.

ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТИ В ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИКЕ

*Алексей Васильевич Фадеев¹,
Татьяна Вячеславовна Черушева²*

^{1,2} Пензенский государственный университет, Пенза, Россия
¹ aleksejtunturun@gmail.com, ² tank1100@yandex.ru

Аннотация. Представлены основные понятия теории вероятности, применяемые в энергетике, рассмотрены примеры.

Ключевые слова: вероятность, энергетика, энергосистема

PROBABILITY THEORY PROBLEMS IN THE ELECTRIC POWER INDUSTRY

Alexey V. Fadeev¹, Tatyana V. Cherusheva²

^{1,2} Penza State University, Penza, Russia
¹ aleksejtunturun@gmail.com, ² tank1100@yandex.ru

Abstract. The main concepts and principles of stochastic processes used in the energy sector are presented, examples are considered.

Keywords: probability, energy, power system

Занимаясь конкретной деятельностью, специалист должен представлять, с каким объектом он имеет дело, каковы его строение и свойства, а также взаимосвязи этого объекта с окружающим миром и его поведение. На рубеже XX и XXI веков технические, технологические, организационные, экономические и другие аспекты деятельности человека отличаются чрезвычайной сложностью, он все в большей степени взаимодействует со сложными устройствами, системами, процессами. Это целиком относится и к инженеру-электроэнергетику, работающему в электроэнергетической системе.

В электроэнергетических системах (ЭЭС) случайными событиями являются, например, аварии типа короткого замыкания на ЛЭП, отказы оборудования и другие. Случайные состояния определяются случайными величинами. К случайным величинам в электроэнергетике относятся такие важные параметры режима ЭЭС, как спрос электрической мощности (нагрузка) и энергии (потребление), отклонения частоты и напряжений в электрических сетях от номинальных значений, располагаемые мощности электростанций, мощность агрегатов в аварийном

ремонте, длительности безаварийной работы и аварийного ремонта отдельных агрегатов, напор на ГЭС и др. Знание закономерностей этих случайных величин необходимо как при проектировании, так и при эксплуатации ЭЭС.

Случайной функцией называется величина, меняющаяся при изменении аргумента случайным образом. Если аргументом случайной функции, как в большинстве практических приложений, является время, то такая случайная функция называется случайным процессом. Случайная функция в каждом отдельном опыте представляется некоторой конкретной функцией аргумента – неслучайной. Эта конкретная функция называется реализацией случайной функции в данном опыте. Случайные процессы в электроэнергетике связаны в первую очередь с метеорологическими условиями – это изменения располагаемой мощности и энергии ГЭС, зависящие от приточности рек; изменения суммарного спроса мощности и энергии в ЭЭС, зависящие от изменения температуры наружного воздуха, и т.д. Случайные процессы могут быть связаны также с потоками однородных событий, например возникновение аварий, окончание аварийных ремонтов и т.п.

Приведём некоторые основные формулы теории вероятности.

1. Классическое определение вероятности. Вероятностью наступления события A в некотором испытании называют отношение $P(A) = n/m$, где n – общее число всех равновозможных, элементарных исходов этого испытания, а m – количество элементарных исходов, благоприятствующих событию A .

2. Локальная теорема Лапласа. Пусть проводится достаточно большое ($> 50-100$) количество n независимых испытаний, в каждом из которых событие A может появиться с вероятностью p . Тогда вероятность $P_n(m)$ того, что в n испытаниях событие A наступит ровно m раз, приближённо равна:

$$P_n(m) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x), \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2)$$

Теорема обеспечивает хорошее приближение к точному результату $P_n(m)$ при условии $npq > 10$, в противном случае значение будет далеко от истины.

3. Интегральная теорема Лапласа. Если вероятность p появления случайного события A в каждом независимом испытании постоянна, то вероятность того, что в n испытаниях событие A наступит не менее m_1 и не более m_2 раз, приближённо равна: $\square\square$

$$P_n(m_1 \leq m \leq m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

$$\text{где } \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-z^2} dz, x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}, x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Теорема применима при тех же условиях: количество испытаний должно быть достаточно велико ($> 50-100$) и произведение $\square npq > 10$.

4. Неравенство Чебышева. Вероятность того, что отклонение случайной величины X от её математического ожидания по абсолютной величине меньше положительного числа ε , не меньше, чем:

$$P(|(X - M(x))| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(X^2)}{\varepsilon^2},$$

где $D(X)$ – дисперсия этой случайной величины.

Рассмотрим примеры задач, возникающих в электроэнергетике и решаемых с помощью формул курса «Теория вероятности и математическая статистика».

П р и м е р 1: Пусть статистическая вероятность повреждения любой фазы линии составляет 0,001. Примем также, что если повреждение одной фазы произошло, то повреждение любой другой фазы будет иметь статистическую вероятность 0,2, т. е. условная вероятность повреждения второй фазы при повреждении первой равна 0,2. Кроме того, пусть аналогичные вероятности повреждения третьей фазы при повреждении двух других составляют 0,5. Определим соотношения вероятностей одно-, двух- и трехфазных коротких замыканий при условии, что авария началась с повреждения одной фазы.

Данная задача решается при помощи формулы

$$P(A/B) = P(AB)/P(B) \quad (1)$$

Вероятность аварийного повреждения двух фаз $p' = 0,2 \cdot 0,001 = 0,0002$.

Вероятность аварийного повреждения трех фаз $p'' = 0,5 \cdot 0,0002 = 0,0001$.

Определим условные вероятности развития аварии, т. е. условные вероятности повреждения других фаз. Пусть статистические наблюдения установили, что однофазных коротких замыканий в данной сети за некоторый длительный период времени было 100, а в 20 случаях из них повредилась и другая фаза. Тогда на основании формулы (1) можно получить условную вероятность повреждения и другой фазы;

$$P(A/B) = P(AB)/P(B) = 20/100 = 0,2,$$

так как число аварий можно считать пропорциональным вероятности.

Таким образом, соотношения вероятностей одно-, двух- и трехфазных повреждений будут: 0,001; 0,0002; 0,0001 или примерно 77 % однофазных, 15 % двухфазных и 8 % трехфазных.

П р и м е р 2. В энергетической системе, включающей четыре однотипных генератора, требуется найти вероятности одновременного выхода из строя нескольких генераторов. Вероятность аварийного выхода каждого $q = 0,02$, вероятность рабочего состояния $p = 0,98$. Случайной величиной будем считать число агрегатов m , вышедших в аварию. Эта величина является дискретной и может принимать значения 0, 1, 2, 3, 4.

Пользуясь формулой биномиального распределения

$$P(n,m) = C_n^m p^{n-m} q^m. \quad (2)$$

можно найти вероятность выхода из работы агрегатов. Выполнив вычисления по этой формуле, получим таблицу распределения вероятностей случайной величины m – числа аварийных агрегатов.

m	0	1	2	3	4
Вероятность	0,92237	0,07530	0,00230	0,00003	0,00000

Пример 3. Пусть среднемесячная максимальная нагрузка энергосистемы равна 1200 МВт. Примем, что отклонения суточных максимумов в рабочие дни данного месяца подчинены закону нормального распределения с известными числовыми характеристиками. Найти вероятность того, что суточный максимум будет колебаться в пределах 1250...1300 МВт или 1050...1120 МВт. При этом известно, что дисперсия $D(\eta) = 2500$, а стандартное отклонение $\delta(\eta) = 50$.

Воспользуемся выражением для вероятности попадания случайной величины в заданный интервал.

$$P(1250 \leq \eta < 1300) = 0,5\Phi[(1300 - 1200) / 50] - 0,5\Phi[(1250 - 1200) / 50] = \\ = 0,5\Phi(2) - 0,5\Phi(1) = 0,47725 - 0,34134 = 0,1359;$$

$$P(1050 \leq \eta < 1120) = 0,5\Phi[(1120 - 1200) / 50] - 0,5\Phi[(1050 - 1200) / 50] = \\ = 0,5\Phi(-1,6) - 0,5\Phi(-3) = -0,5\Phi(1,6) + 0,5\Phi(3) = -0,44520 + 0,49865 = \\ = 0,05345.$$

Пример 4. Пусть, событием будет аварийный выход в часы вечернего максимума энергосистемы какого-либо агрегата. Тогда числом испытаний будет число дней наблюдения n , а числом появлений события – число дней, когда данный агрегат находится в период максимума в аварийном состоянии m . При этом возможны три задачи.

Задача 1. Найти наименьшее число испытаний n , при котором разность относительной частоты m/n и вероятности события p не превышает заданной величины ε с заданной вероятностью β .

Задача 2. Найти вероятность β того, что отклонение относительной частоты события m/n от его вероятности p будет меньше заданного числа ε при заданном числе испытаний n .

Задача 3. Найти максимальное отклонение относительной частоты события от его вероятности p при числе испытаний n , имеющее заданную вероятность β . По величине вероятности $\beta = \Phi(\alpha)$ из таблиц интеграла вероятности находим α , а затем $\varepsilon = \sqrt{\frac{pq}{n}}$.

Таким образом, можно сделать вывод, что будущему инженеру-энергетику просто необходимы знания по теории вероятности в повседневной деятельности.

Список литературы

1. Воропай Н. И. Теория систем для электроэнергетиков : учеб. пособие для студентов электроэнергетических специальностей. Новосибирск : Наука, 2000. 272 с.

2. Кремер Н. Ш. Теория вероятности и математическая статистика : учебник для вузов. 2-е изд., перераб. и доп. М. : ЮНИТИ ДАНА, 2004. 573 с.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПРОСТЕЙШИХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Кирилл Евгеньевич Футанов

Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

futanov1337@gmail.com

Аннотация. Рассматривается практическое применение дифференциальных уравнений к описанию процессов, происходящих в теории электрических цепей. Анализ и расчет переходных процессов показан на примере LRC-цепи.

Ключевые слова: обыкновенное дифференциальное уравнение, колебательный контур, электрическая цепь

DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE SIMPLEST ELECTRICAL CIRCUITS

Kirill E. Futanov

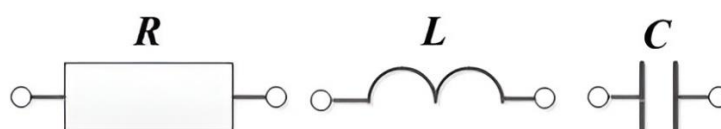
Penza State University, Penza, Russia

futanov1337@gmail.com

Abstract. The practical application of differential equations to the description of processes occurring in the theory of electrical circuits is considered. The analysis and calculation of transients is shown by the example of an LRC-circuit.

Keywords: ordinary differential equation, oscillatory circuit, electric circuit

Одной из областей, в которой применение дифференциальных уравнений оказывается наиболее эффективным, является теория электрических цепей. Электрическая цепь представляет собой сеть (если угодно, конечный граф), состоящую из узлов, между которыми включены элементы цепи. Простейшими (и одновременно, важнейшими) элементами электрических цепей являются сопротивления, индуктивности и емкости. Стандартные их обозначения приведены на рис. 1 [1].



Резистор Индуктивность Ёмкость

Рис. 1

Распределение электрических зарядов в цепи (рис. 2) в каждый момент времени в каждом узле создает (электрический) потенциал. Если двухполюсник включен между узлами a и b цепи (такой двухполюсник мы в дальнейшем будем обозначать ab) с потенциалами $u_a(t)$ и $u_b(t)$, то на нем возникает разность потенциалов (падение напряжения) $u_{ab}(t) = u_b(t) - u_a(t)$. Эта разность потенциалов вызывает движение зарядов через двухполюсник, называемое током. Интенсивность этого движения называется силой тока и обозначается $i_{ab}(t)$. Ясно, что $u_{ab}(t) = -u_{ba}(t)$ и $i_{ab}(t) = -i_{ba}(t)$. Разность потенциалов на двухполюснике и сила тока, протекающего через него, не являются независимыми.

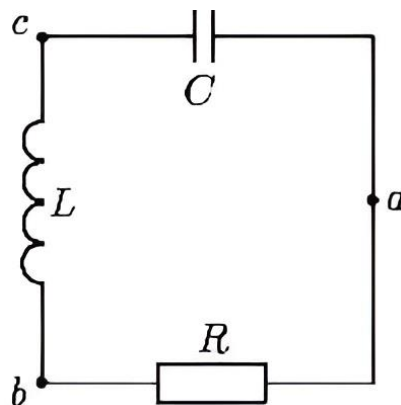


Рис. 2

При любых изменениях в электрической цепи (включении, выключении, коротком замыкании, обрыве), называемых коммутациями, в ней возникают переходные процессы.

Переходным называется процесс, возникающий в электрической цепи при переходе от одного установившегося режима работы к другому. Физически переходные процессы представляют собой процессы перехода цепи от одного электрического состояния к другому электрическому состоянию.

Очевидно, что эти процессы не могут протекать мгновенно, так как невозможно мгновенное изменение энергии, запасенной в электромагнитном поле накопительных элементов электрической цепи.

Общий подход к расчету переходных процессов в любой электрической цепи заключается в составлении с помощью законов Кирхгофа дифференциальных уравнений, решение которых может проводиться различными методами.

Рассчитать электрическую цепь – это значит найти величины токов, протекающих в каждый момент времени через каждый элемент цепи, или, что эквивалентно, указать потенциал в каждом узле цепи

в каждый момент времени. Для этого составляется система дифференциальных уравнений, описывающая цепь. Эта система составляется с помощью законов Кирхгофа [2].

Первый закон Кирхгофа гласит: для любого узла цепи сумма всех токов, втекающих в узел из всех элементов, подключенных к данному узлу, равна нулю. Например, если в цепи имеются только двухполюсники и $a_1b, \dots, a_kb$, – все двухполюсники, подключенные к узлу b , то

$$i_{a_1b}(t) + \dots + i_{a_kb}(t) = 0.$$

В соответствии со вторым законом Кирхгофа, сумма падений напряжений на всех элементах цепи, включенных в замкнутый контур, равна нулю. При этом замкнутым контуром цепи называется последовательность узлов $a_1, \dots, a_k$ такая, что между парами a_1 и a_2 , a_2 и a_3 , ..., a_{k-1} и a_k включены элементы. В частности, в случае цепи из двухполюсников

$$u_{a_1a_2}(t) + u_{a_2a_3}(t) + \dots + u_{a_{k-1}a_k}(t) + u_{a_ka_1}(t) = 0.$$

Известно (это теорема), что законы Кирхгофа вместе с законами функционирования элементов дают достаточное число уравнений для неизвестных токов и разностей потенциалов на каждом элементе.

Классический метод расчета переходных процессов заключается в непосредственном интегрировании дифференциальных уравнений, описывающих изменения токов и напряжений на участках цепи в переходном процессе. В общем случае при использовании классического метода по законам Ома и Кирхгофа составляются уравнения состояния цепи для значений напряжений и токов, связанных между собой на отдельных элементах цепи соотношениями:

- резистор (идеальное активное сопротивление): $u_r = ri_r$;
- катушка индуктивности (идеальная индуктивность): $u_L = L \frac{di_L}{dt}$;
- конденсатор (идеальная ёмкость): $u_C = \frac{1}{C} \int i_C dt$.

Простейшим примером электрической цепи является колебательный контур (или LRC-цепь), схема которого изображена на рис. 2 [3].

Уравнение такой цепи, составленное по законам Кирхгофа, является интегро-дифференциальным, состоит из суммы падений напряжения на каждом последовательно включенном элементе:

$$Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt = U. \quad (1)$$

После дифференцирования уравнения (1) переходит в однородное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0 \quad (2)$$

Ток в исследуемой цепи определяется из решения однородного дифференциального уравнения (2).

Вводим замену переменной, обозначив $\frac{di}{dt} = p$. Уравнение (2) превращается в характеристическое уравнение алгебраического вида

$$Lp^2 + Rp + \frac{1}{C} = 0.$$

Находим корни этого алгебраического уравнения. они имеют вид

$$p_{1,2} = -\left(\frac{R}{2L}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \left(\frac{1}{LC}\right)^2}.$$

Окончательно, введя обозначения $\delta = \frac{R}{2L}$, $\omega_o^2 = \frac{1}{LC}$, получим

$$p_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_o^2}.$$

Принятые обозначения имеют вполне очевидный физический смысл, обладая размерностью частоты электромагнитных колебаний в последовательном колебательном контуре ω_o – резонансная частота собственных колебаний в контуре, а δ соответствует затуханию из-за наличия в контуре резистивного элемента R .

По полученным корням записываем свободную составляющую переменного тока:

$$i'(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t},$$

где A_1, A_2 – постоянные интегрирования находятся с учетом независимых начальных условий $i_L(0)$ и $u_C(0)$. В рассматриваемом примере по свободной составляющей тока можно рассчитать свободную составляющую напряжения на емкости:

$$u'(t) = \left(\frac{1}{C}\right) \int i'(t) dt = \frac{A_1 e^{p_1 t}}{C p_1} + \frac{A_2 e^{p_2 t}}{C p_2}.$$

Так как напряжение $u_C''(t) = U$, то полное переходное напряжение на емкости будет равно:

$$u_C = \frac{A_1 e^{p_1 t}}{C p_1} + \frac{A_2 e^{p_2 t}}{C p_2} + U.$$

При $t = 0$ получим систему из двух уравнений для нахождения постоянных интегрирования:

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 0, \\ \frac{A_1}{Cp_1} + \frac{A_2}{Cp_2} = -U. \end{cases}$$

Из системы выражения A_1, A_2 имеют следующий вид:

$$A_1 = \frac{Cp_1 p_2 U}{p_2 - p_1}, A_2 = -\frac{Cp_1 p_2 U}{p_2 - p_1}.$$

Полные переходные ток в цепи и напряжение в емкости задаются выражениями:

$$i = \frac{Cp_1 p_2 U}{(p_2 - p_1)(e^{p_1 t} + e^{p_2 t})},$$

$$u_C = \frac{U}{(p_2 - p_1)(e^{p_1 t} + e^{p_2 t})} + U.$$

Таким образом, осуществляются расчеты переходных процессов классическим методом.

Список литературы

1. Матвиенко В. А. Основы теории цепей : учеб. пособие для вузов. Екатеринбург : УМЦ УПИ, 2016. 162 с.
2. Попов В. П. Основы теории цепей : учебник для вузов. 6-е изд., испр. М. : Высш. шк., 2007. 575 с.
3. Бычков Ю. А., Золотницкий В. М., Чернышев Э. П. Основы теории электрических цепей : учебник для вузов. СПб. : Лань, 2002. 464 с.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РУНГЕ – КУТТЫ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

*Лазиз Шухратович Хайдаров¹,
Екатерина Юрьевна Бельдягина²*

^{1,2} Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

¹ khaydarov.0302@gmail.com

Аннотация. На примере метода Рунге – Кутты показана практическая реализация численных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Проведен анализ численных результатов, а также сравнение с методом Эйлера.

Ключевые слова: численные методы, метод Рунге – Кутты, обыкновенное дифференциальное уравнение

APPLICATION OF THE FOURTH-ORDER RUNGE – KUTTA METHOD FOR NUMERICAL SOLUTION OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

Laziz Sh. Khaydarov¹, Ekaterina Yu. Beldyagina²

^{1,2} Penza State University, Penza, Russia

¹ khaydarov.0302@gmail.com

Abstract. Using the Runge – Kutta method as an example, the practical implementation of numerical methods for solving ordinary differential equations is shown. The numerical results are analyzed and compared with the Euler method.

Keywords: numerical methods, Runge – Kutta method, ordinary differential equation

Введение

Численные методы имеют огромное значение для современных программных методов моделирования и проектирования. Так, в проектировании радиотехнических устройств численные методы позволяют проводить точное и эффективное моделирование и анализ различных физических явлений и процессов. Например, анализ электрических и магнитных свойств материалов с использованием численных методов позволяет определить влияние материалов на производительность устройств и выбрать наиболее подходящие материалы для конкретных приложений.

В целом, численные методы являются неотъемлемой частью современных программных методов моделирования и математических пакетов. И здесь можно выделить группу численных методов для решения обыкновенных дифференциальных уравнений (метод Эйлера, Рунге-Кутты и прочие), которые безусловно заслуживают внимания.

Цель работы: получить представление о численных методах решения обыкновенных дифференциальных уравнений, которые часто используются при решении типовых инженерных. Ознакомиться с методом Рунге-Кутты. Сравнить метод Рунге-Кутты с методом Эйлера.

Метод Рунге-Кутты

Метод Рунге-Кутты 4-го порядка (точность = шаг^4) является численным методом решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) и широко применяется для численного интегрирования. Он основан на итеративном процессе, который позволяет приближенно находить значения функции в различных точках.

Для рассмотрения метода Рунге-Кутты рассмотрим ОДУ первого порядка вида:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

где $f(x, y)$ – функция, описывающая зависимость производной от значения функции в точке (x, y) , а (x, y) – независимые переменные.

Метод Рунге-Кутты вычисляет приближенное значение $y(x + h)$ функции y в точке $x + h$, используя информацию о значении функции в начальной точке x и производных в нескольких промежуточных точках. Шаг интегрирования обозначен как h .

Шаги метода Рунге-Кутты:

1. Вычисление коэффициентов k_1, k_2, k_3 и k_4 :

$$k_1 = f(x, y), \quad k_2 = f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}k_1\right),$$

$$k_3 = f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}k_2\right), \quad k_4 = f(x + h, y + h * k_3).$$

где $f(x, y)$ – функция, описывающая зависимость производной от значения функции в точке (x, y) .

2. Вычисление нового значения функции:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).$$

Таким образом, метод Рунге-Кутты 4-го порядка вычисляет приближенное значение функции в новой точке, используя четыре промежуточных коэффициента k_1, k_2, k_3 и k_4 , которые учитывают изменение

производной функции в разных точках на интервале шага интегрирования h .

Повторяя эти шаги для каждого значения x , можно получить приближенное решение ОДУ в заданном диапазоне.

Метод Рунге-Кутты обладает точностью 4-го порядка, что делает его Кутты достаточно точным и позволяет получать хорошие результаты при решении ОДУ.

В качестве модельного примера рассмотрим уравнение $y' = 2x - 1 + y^2$, $x \in [0; 2,5]$ с начальным условием $y(0) = -1$. Был построен численный алгоритм для метода Эйлера и Рунге-Кутты 4-го порядка (рис. 1).

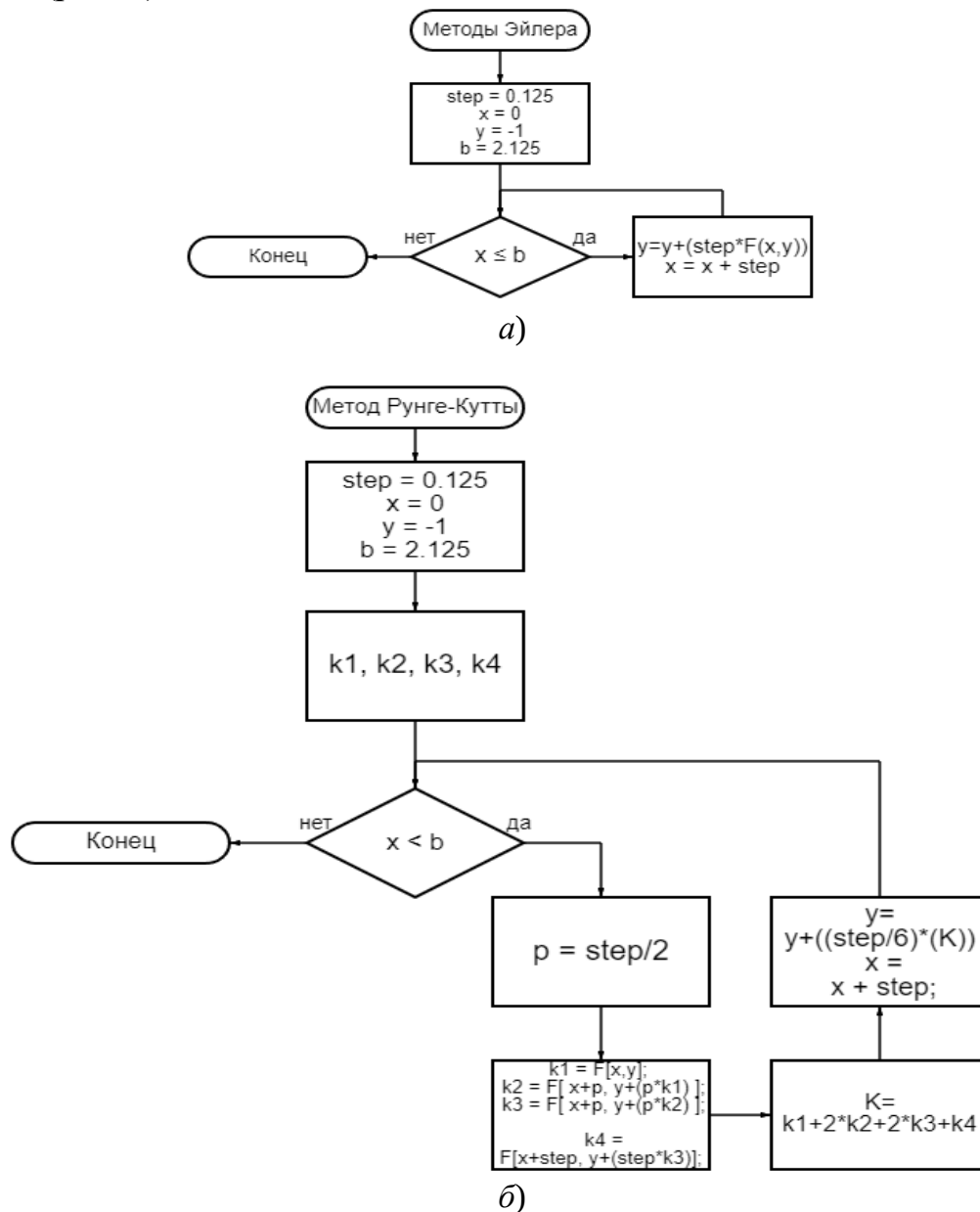


Рис. 1. Алгоритм метода Эйлера (а) Рунге-Кутты (б) в виде блок-схемы

Анализ результатов

Далее подставим в программу начальные данные из условия примера. Пусть значение шага h_1 равняется 0,125 в первом случае и значение шага h_2 равняется 0,01 во втором случае. Тогда, мы получим: вычисленные значения функции (ось ординат) и аргумента (ось абсцисс), а также графики функций при 18 точках и 213 точках соответственно.

Из полученных графиков (рис. 2) видно, что точность метода Эйлера сильно зависит от выбранного шага. В случае метода Рунге-Кутты видно, что точность не столь чувствительна к выбранному шагу (рис. 2). Да, с увеличением шага, точность возросла, но не критично.

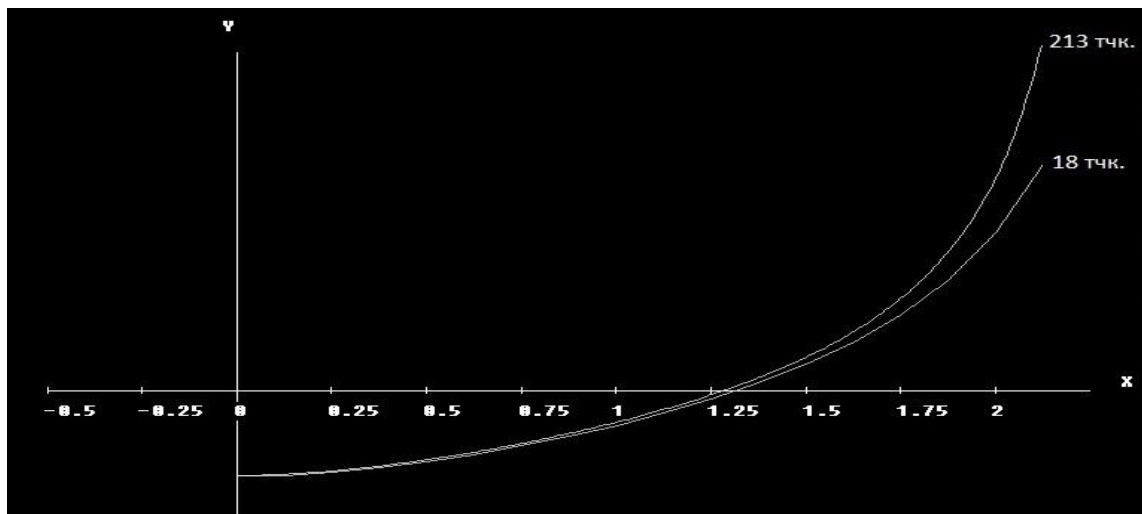


Рис. 2. Графики функций полученные программно методом Эйлера, при шаге $h_1 = 0,125$ (18 точек) и шаге $h_2 = 0,01$ (213 точек)

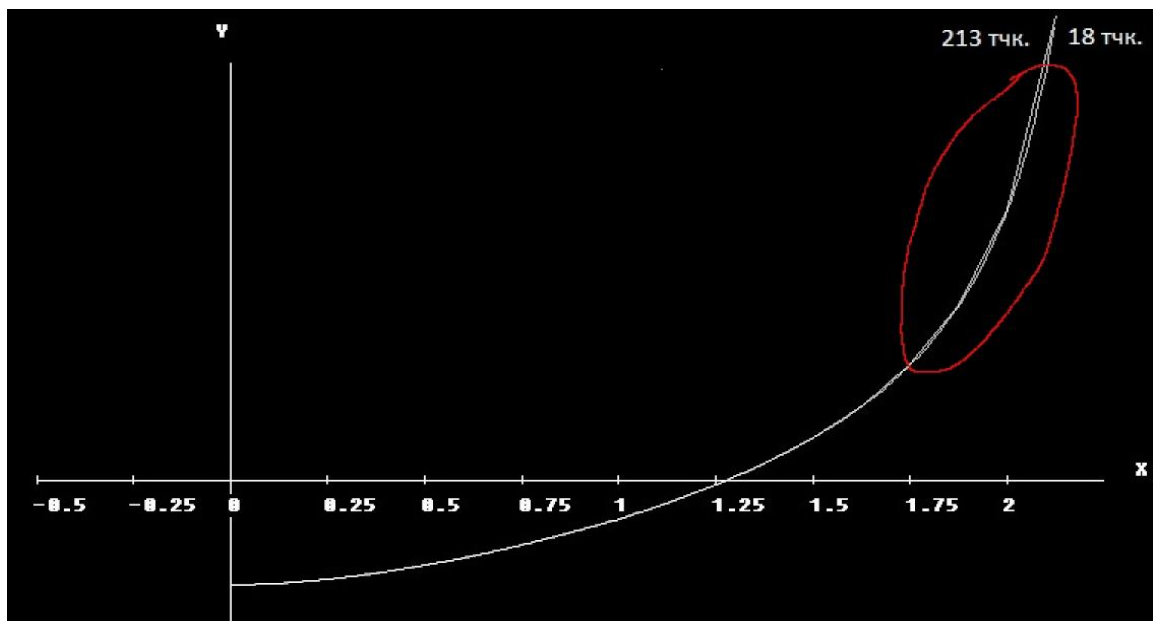


Рис. 3. Графики функций полученные программно методом Рунге-Кутты, при шаге $h_1 = 0,125$ (18 точек) и шаге $h_2 = 0,01$ (213 точек)

В табл. 1 показаны рассчитанные нами числовые значения метода Рунге-Кутты и Эйлера в сравнении со значениями полученными в математическом пакете MathCad 15.

Таблица 1

Численные значения графиков, при шаге = 0,125 (18 точек)

	Метод Эйлера		MathCad		Метод Рунге-Кутты	
	y	x	y	x	y	x
1	0	-1	0	-1	0	-1
2	0,125	-1	0,125	-0,986	0,125	-0,986
3	0,25	-0,969	0,25	-0,947	0,25	-0,947
4	0,375	-0,914	0,375	-0,88	0,375	-0,888
5	0,5	-0,841	0,5	-0,813	0,5	-0,813
6	0,625	-0,753	0,625	-0,723	0,625	-0,723
7	0,75	-0,651	0,75	-0,62	0,75	-0,619
8	0,875	-0,536	0,875	-0,502	0,875	-0,501
9	1	-0,406	1	-0,368	1	-0,368
10	1,125	-0,26	1,125	-0,217	1,125	-0,216
11	1,25	-0,095	1,25	-0,042	1,25	-0,042
12	1,375	0,094	1,375	0,162	1,375	0,162
13	1,5	0,314	1,5	0,406	1,5	0,407
14	1,625	0,576	1,625	0,711	1,625	0,712
15	1,75	0,899	1,75	1,111	1,75	1,112
16	1,875	1,313	1,875	1,681	1,875	1,681
17	2	1,872	2	2,599	2	2,599
18	2,125	2,685	2,125	4,467	2,125	4,467

В то время как значения метода Эйлера имеют ощутимую погрешность. Местами эта погрешность доходит до 40 %. Такие большие отклонения не позволяют использовать метод Эйлера в научной деятельности и исследованиях, где требуются точные данные.

Очевидно, что чем меньше шаг, тем меньше погрешность. Это происходит вследствие точности методов. Метод Эйлера, как описывалось выше имеет точность равную шагу (точность = $шаг^1$ = шаг). В свою очередь метод Рунге-Кутты 4-го порядка являясь более сложным методом, имеет более высокую точность, в частности точность равняется шагу в степени номера порядка (точность = $шаг^4$).

Исходя из описанного выше, мы можем сделать вывод, что метод Рунге-Кутты предпочтительнее метода Эйлера, в том смысле, что он имеет более высокую точность и не требует большого количества экспериментальных точек. Метод Рунге-Кутты справедливо можно считать более универсальным и пользоваться им для решения сложных инженерных, физических и математических задач.

Список литературы

1. Пименов В. Г., Ложников А. Б. Численные методы : учеб. пособие : в 2 ч. / науч. ред. Ю. А. Меленцова. Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2014. Ч. 2. 106 с.

2. Волков Е. А. Численные методы: учеб. пособие для вузов. 2-е изд., испр. М. : Наука, 1987. 248 с.

3. Слабнов В. Д. Численные методы : учебник для вузов. 2-е изд. СПб. : Лань, 2022. 392 с.

4. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. 3-е изд., перераб. и доп. М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2003. 632 с.

ПОСТРОЕНИЕ И АНАЛИЗ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ФАКТОРОВ, ВЛИЯЮЩИХ НА НАРУШЕНИЕ СНА

*Наталья Юрьевна Скибицкая¹, Егор Сергеевич Хохлов²,
Иван Андреевич Мартынов³*

^{1,2,3} Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

¹ slonenok81@mail.ru

Аннотация. Значимость нарушений сна в деятельности человека общеизвестна. Современная жизнь характеризуется высоким уровнем стресса, интенсивным ритмом работы, что может негативно сказываться на качестве сна у людей. Приведена разработка математической модели, которая поможет выявить основные причины и факторы, влияющие на нарушение сна, а также предложить методы решения данной проблемы.

Ключевые слова: нарушение сна, математическая модель, факторы, анализ, дифференциальные уравнения

CONSTRUCTION AND ANALYSIS OF A MATHEMATICAL MODEL OF FACTORS AFFECTING SLEEP DISORDERS

*Natalia Yu. Skibitskaya¹, Egor S. Khokhlov²,
Ivan A. Martynov³*

^{1,2,3} Penza State University, Penza, Russia

¹ slonenok81@mail.ru

Abstract. The importance of sleep disorders in human activity is well known. Modern life is characterized by a high level of stress, an intense rhythm of work, which can negatively affect the quality of sleep in people. The article is devoted to the development of a mathematical model that examines the factors affecting sleep disorders. The model will help to identify the main causes and factors affecting sleep disorders, as well as suggest methods to solve this problem.

Keywords: sleep disorder, mathematical model, factors, analysis, differential equations

Нарушение сна является распространенной проблемой, с которой сталкиваются многие люди в современном мире. Факторы, которые могут влиять на сон, включают такие аспекты, как стресс, образ жизни, физическое и психическое здоровье, условия окружающей среды и многое другое. Цель данного исследования состоит в построении математической модели, которая будет учитывать влияние этих факторов на нарушение сна и предоставит инструменты для анализа их взаимосвязи.

Для создания математической модели, исследующую данную проблему, используется система дифференциальных уравнений (1а) и (1б).

$$\frac{dy}{dt} = f_1(s, h, p, e) - g_1(s, h, p, e)y(t) \quad (1a)$$

$$\frac{dy}{dt} = f_2(s, h, p, e) - g_2(s, h, p, e)y(t) \quad (16)$$

где $y(t)$ и $z(t)$ представляют собой две переменные модели, которые связаны с качеством сна и его продолжительностью соответственно. Параметры s , h , p и e представляют собой факторы, влияющие на сон, такие как стресс (s), образ жизни (h), физическое и психическое здоровье (p) и условия окружающей среды (e). Функции f_1 , g_1 , f_2 и g_2 описывают зависимость качества сна и его продолжительности от этих факторов.

Ориентируемся на данные из табл. (1) и (2).

Таблица 1

Процентное соотношение уровней векторов, входящих в структуру индивидуальной модели психологического здоровья

Уровень	СтВ	ПВ	ЯВ	ТВ	ДВ	ИВ	СВ	ГВ
	Процентное соотношение							
Низкий	2,3 %	2,3 %	2,3 %	6,8 %	9,1 %	4,5 %	13,6 %	9,1 %
Средний	43,2 %	63,6 %	81,8 %	65,9 %	75 %	52,3 %	77,3 %	86,4 %
Высоки	54,5 %	34,1 %	15,9 %	27,3 %	15,9 %	43,2 %	9,1 %	4,5%

Таблица 2

Сравнение связи между Психологическим здоровьем и стрессом и Психологическим здоровьем и сном

Стресс-Психологическое здоровье			Сон-Психологическое здоровье		
Шкала	Значение коэф. корреляции r -Спирмена	Уровень значимости (p)	Шкала	Значение коэф. корреляции r -Спирмена	Уровень значимости (p)
СтВ	-0,570906	0,00052	СтВ	-0,114282	0,460113
ПВ	-0,267682	0,043968	ПВ	-0,007310	0,637229
ЯВ	0,338307	0,040156	ЯВ	0,1333278	0,388427
ТВ	-0,208382	0,174649	ТВ	0,025351	0,870249
ДВ	-0,180392	0,241285	ДВ	-0,195955	0,202380
ИВ	-0,185737	0,227390	ИВ	-0,140717	0,362249
СВ	-0,221709	0,148070	СВ	-0,147808	0,338317
ГВ	-0,059224	0,702474	ГВ	-0,235195	0,124332

Для анализа модели исследуется стационарное состояние системы, устойчивость и зависимость от входных параметров, которые иллюстрируют влияние отдельные факторов на качество сна и его продолжительность.

Рассматривается случай, когда физическое здоровье (p) является основным фактором, оказывающим влияние на сон, используются формулы Брука (2), Маттёуса (3), Кастерана (4), Флеффиа (5), Бргера-Александрова (6).

Формула Брука:

$$B = \int C(t)dt \quad (2)$$

где $C(t)$ – функция концентрации кофеина в организме в зависимости от времени; t – общая продолжительность сна [1].

Формула Маттьюса:

$$F_m = \int I(t)dt \quad (3)$$

где $I(t)$ – функция интенсивности света в зависимости от времени; dt – шаг интегрирования [2].

Формула Кастерана:

$$M = \int A(t)dt \quad (4)$$

где $A(t)$ – функция метаболической активности организма в зависимости от времени [3].

Формула Флеффиа:

$$I = \int P(t)V(t)dt \quad (5)$$

где $P(t)$ – функция уровня физической активности в зависимости от времени; $V(t)$ – функция скорости сердечного ритма в зависимости от времени.

Формула Бргера-Александрова:

$$Sum = \int E(t)dt \quad (6)$$

где $E(t)$ – функция суммарного эффекта факторов, влияющих на сон, в зависимости от времени.

Для более полного анализа модели факторов, влияющих на нарушение сна, рассматриваются 3 модели, которые показывают влияние отдельных факторов на качество сна и его продолжительность:

Модель 1:

Влияние стресса на качество сна записывается уравнением (7), показывающее зависимость качества сна от уровня стресса:

$$Cn = \alpha + \beta_1 * Ct + \varepsilon \quad (7)$$

где Cn – переменная для обозначения сна; Ct – переменная для обозначения стресса; Gz – переменная для обозначения образа жизни; Zd – переменная для обозначения психического и физического здоровья; Ch – переменная для обозначения сонливости

Значения коэффициентов α и β_1 определены в результате анализа и наблюдений. Рассматривается сценарии с различными значениями уровня стресса и оценивается их влияние на качество сна с помощью модели.

Модель 2: Влияние образа жизни на продолжительность сна описывается уравнением (8), показывающее зависимость продолжительности сна от образа жизни:

$$Cn = \alpha + \beta_2 * Gz + \varepsilon \quad (8)$$

– Значения коэффициентов α и β_2 определены на основе данных и исследований.

– Модель сравнивает различные образы жизни и оценивает, как они влияют на продолжительность сна.

Модель 3: Влияние физического и психического здоровья на общую сонливость выводится уравнением (9), показывающим зависимость общей сонливости от физического и психического здоровья:

$$Ch = \alpha + \beta_3 * Zd + \varepsilon \quad (9)$$

– Значения коэффициентов α и β_3 определяются на основе статистических данных и исследований.

– Модель анализирует различные состояния здоровья и их влияние на общую сонливость.

Таким образом, данные модели очень точно позволяют систематизировать и проанализировать зависимость качества сна от тех или иных признаков. На графиках (1) и (2) показывается взаимосвязь факторов и показателей сна. Исследование данных моделей позволяет нам лучше понять, как каждый фактор влияет на качество сна и его продолжительность, а также предлагает рекомендации для улучшения данных показателей. В дальнейшем, изучение приведенных моделей может служить основой для разработки индивидуальных решений и стратегий в описываемой сфере.

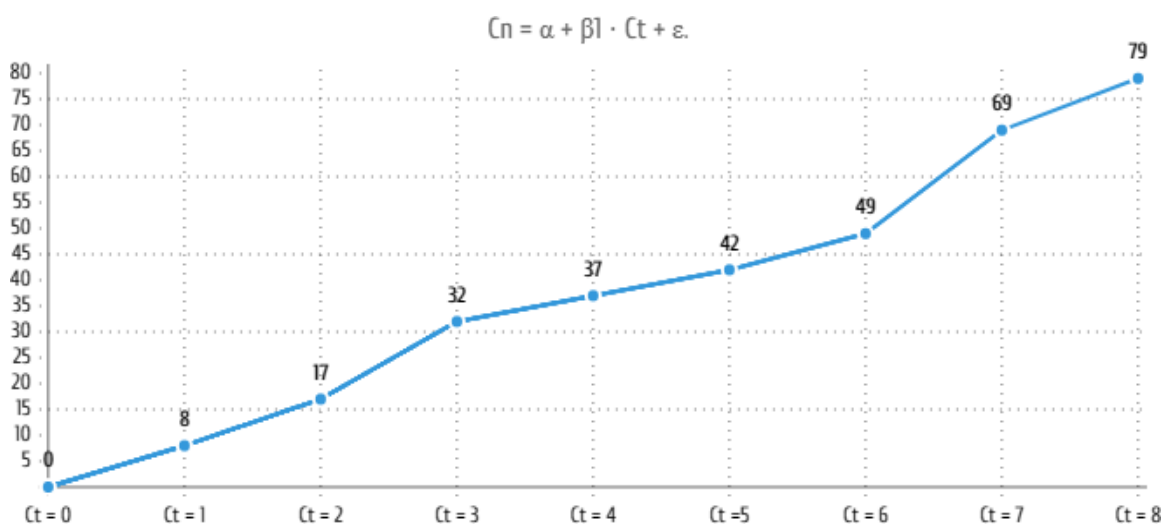


График 1. Процентное соотношение уровней векторов, входящих в структуру индивидуальной модели психологического здоровья

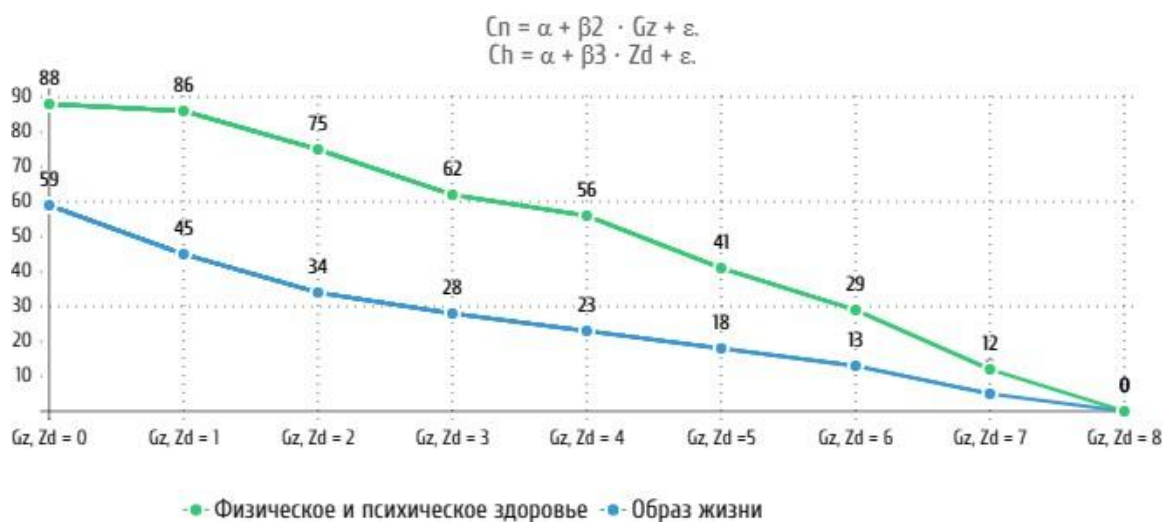


График 2. Процентное соотношение уровней векторов, входящих в структуру индивидуальной модели психологического здоровья

Список литературы

1. Брук А. В., Швецов А. П., Зарецкий И. А. Методы определения психофизических особенностей человека // Психологический журнал. 2004. Т. 25, № 5.
2. Маттьюс Р., Хантер С. Разработка формулы прогнозирования психологического потенциала человека // Журнал прикладной психологии. 2010. Т. 96, № 2.
3. Кастеран М., Дюбуа Н. Влияние стресса на работоспособность и качество сна // Журнал медицинской психологии. 2015. Т. 78, № 3.

АППРОКСИМАЦИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ НА ОТРЕЗКЕ МЕТОДОМ ПАДЕ

Даниил Олегович Целаев

Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

tselaev03@mail.ru

Аннотация. Посвящена теме аппроксимации Паде, методу математического анализа, используемому для приближенного представления функций с помощью рациональных дробей. Рассматриваются основные принципы метода, его математическая основа и применение в различных областях, таких как физика, инженерия и компьютерные науки. Также обсуждаются преимущества и ограничения метода аппроксимации Паде, а также приводятся примеры его практического использования.

Ключевые слова: аппроксимация, Паде, рациональные дроби

APPROXIMATION OF CONTINUOUS FUNCTIONS ON THE INTERVAL USING THE PADE METHOD

Daniil O. Tselaev

Penza State University, Penza, Russia

tselaev03@mail.ru

Abstract. The article is dedicated to the topic of Pade approximation, a mathematical analysis method used for the approximate representation of functions through rational fractions. It explores the fundamental principles of the method, its mathematical underpinnings, and its applications across various domains, including physics, engineering, and computer science. The article also examines the advantages and limitations of the Pade approximation method, accompanied by practical examples of its utilization.

Keywords: approximation, Pade, rational fractions

1. Постановка задачи

Проблематика, связанная с классическими конструкциями рациональных аппроксимаций аналитических функций (непрерывные дроби, аппроксимации Паде и их обобщения), составляет важное направление на стыке комплексного анализа, теории приближений и вычислительной математики. Развитие этого направления в XVIII–XIX вв. связано с именами многих выдающихся математиков – от Эйлера, Лагранжа, Гаусса до Чебышева, Маркова, Стильтьеса. Интерес к конструктивным

рациональным аппроксимациям вновь значительно возрос в последние десятилетия. Благодаря современному развитию вычислительной техники, начиная с 1960-х гг. метод аппроксимаций Паде находит новые приложения к самым разнообразным вопросам математической физики, механики и прикладной математики. С другой стороны, теоретический анализ возникающих при этом проблем приводит к принципиально новым задачам в комплексном анализе, теории потенциала, теории ортогональных многочленов и других областях анализа. Подчеркнем, что всюду в работе речь идет о приближениях рациональными функциями со свободными полюсами; все рассматриваемые аппроксимации имеют нелинейный характер. Оптимальный выбор коэффициентов не только числителя, но и знаменателя рациональной функции позволяет соответствующим аппроксимациям моделировать особенности аппроксимируемых функций и осуществлять эффективное аналитическое продолжение функции, заданной своим разложением в степенной ряд. С этим связаны принципиальные преимущества рассматриваемых аппроксимаций по сравнению с полиномиальными аппроксимациями, а также рациональными аппроксимациями с заранее фиксированными полюсами.

Дадим определение аппроксимации Паде [1]:

Аппроксимацией Паде типа (n,m) для ряда

$$c(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

называется рациональная функция $\pi_{n,m}(z) = \frac{P_{n,m}(z)}{Q_{n,m}(z)}$ такая, что многочлены $P_{n,m}(z)$, $Q_{n,m}(z)$ удовлетворяют условиям:

1. $Q_{n,m}(z) \not\equiv 0$, $\deg Q_{n,m}(z) \leq m$,
2. $\deg P_{n,m}(z) \leq n$,
3. $c(z)Q_{n,m}(z) - P_{n,m}(z) = O(z^{n+m+1})$, $z \rightarrow 0$.

Из этого определения следует, что вектор, составленный из коэффициентов знаменателя $Q_{n,m}(z)$, принадлежит ядру матрицы [2]. Матрица Тёплица (диагонально-постоянная матрица) – матрица, в которой на всех диагоналях, параллельных главной, стоят равные элементы: то есть выполняется соотношение: $a_{i,j} = a_{i-1,j-1}$.

$$T_{n+1} = \begin{pmatrix} c_{n+1} & c_n & \cdots & c_{n-m+1} \\ c_{n+2} & c_{n+1} & \cdots & c_{n-m+2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ c_{n+m} & c_{n+m-1} & \cdots & c_n \end{pmatrix}$$

Ясно, что ядро этой матрицы размером $m \times (m+1)$ всегда ненулевое. С помощью найденного знаменателя $Q_{n,m}(z)$ и условия из определения легко находится числитель $P_{n,m}(z)$ аппроксимации. Таким образом, аппроксимация Паде всегда существует. Так как ранг матрицы

T_{n+1} может быть меньше m , многочлен $Q_{n,m}(z)$, а значит и $P_{n,m}(z)$, находится, вообще говоря, не единственным образом.

Аппроксимация Паде часто дает лучшее приближение функции, чем усечение ее ряда Тейлора, и может работать там, где ряд Тейлора не сходится. По этим причинам аппроксимации Паде широко используются в компьютерных расчетах [3].

2. Примеры применения аппроксимации Паде.

Приведем результаты аппроксимации для различного рода функций

1. Функция $y = \sin(x)$

	A	B	C	D
1	Степень числителя	Степень знаменателя	Максимальная погрешность	Количество контрольных точек
2	3	3	2,04E-02	100
3	4	3	2,04E-02	
4	5	3	8,48E-04	
5	6	3	8,48E-04	
6	7	3	2,42E-05	
7	8	3	2,42E-05	
8	9	3	5,09E-08	
9	10	3	5,09E-08	
10	3	4	2,15E-03	
11	3	5	2,15E-03	
12	3	6	2,30E-04	
13	3	7	2,30E-04	
14	3	8	2,43E-05	
15	3	9	2,43E-05	
16	3	10	2,43E-05	
17	7	7	1,63E-08	
18	8	8	4,00E-10	

Рис. 1. Результаты для функции 1

2. Функция $y = \frac{1}{1+e^x}$

1	Степень числителя	Степень знаменателя	Максимальная погрешность	Количество контрольных точек
2	3	3	1,55E-04	100
3	4	3	1,55E-04	
4	5	3	6,12E-05	
5	6	3	6,12E-05	
6	7	3	2,64E-06	
7	8	3	2,64E-06	
8	9	3	1,20E-08	
9	10	3	1,20E-08	
10	3	4	2,78E-05	
11	3	5	2,78E-05	
12	3	6	7,07E-07	
13	3	7	1,01E-07	
14	3	8	1,37E-08	
15	3	9	1,50E-09	
16	3	10	4,00E-10	
17	7	7	4,00E-10	
18	8	8	4,00E-10	

Рис. 2. Результаты для функции 2

3. Функция $y = e^{x+3}$

	A	B	C	D
1	Степень числителя	Степень знаменателя	Максимальная погрешность	Количество контрольных точек
2	3	3	2,20E-01	100
3	4	3	2,39E-02	
4	5	3	2,67E-03	
5	6	3	3,00E-04	
6	7	3	3,32E-05	
7	8	3	3,60E-06	
8	9	3	4,00E-07	
9	10	3	1,00E-11	
10	3	4	3,94E-02	
11	3	5	6,52E-03	
12	3	6	9,99E-04	
13	3	7	1,43E-04	
14	3	8	1,90E-05	
15	3	9	2,40E-06	
16	3	10	3,00E-07	
17	7	7	1,00E-07	
18	8	8	1,00E-07	
19				

Рис. 3. Результаты для функции 3

$$4. y = \frac{3x^3 + 12x^2 + 7x + 11}{\exp(x)}$$

	A	B	C	D
1	Степень числителя	Степень знаменателя	Максимальная погрешность	Количество контрольных точек
2	3	3	1,69E-01	100
3	4	3	6,65E-02	
4	5	3	7,25E-02	
5	6	3	5,27E-03	
6	7	3	8,20E-04	
7	8	3	1,29E-04	
8	9	3	1,93E-05	
9	10	3	2,72E-06	
10	3	4	2,51E-02	
11	3	5	8,17E-03	
12	3	6	2,63E-05	
13	3	7	7,14E-04	
14	3	8	1,71E-04	
15	3	9	2,79E-04	
16	3	10	2,24E-05	
17	7	7	6,00E-08	
18	8	8	1,00E-08	
19				

Рис. 4. Результаты для функции 4

В заключении можно отметить, что метод аппроксимации Паде является мощным инструментом для приближенного представления функций. Его преимущества включают высокую точность аппроксимации, особенно в областях, где другие методы могут демонстрировать ограничения. Метод Паде успешно применяется в различных областях, таких как физика, инженерия, финансы и другие.

Важно отметить, что правильный выбор порядка аппроксимации и области применения метода являются ключевыми аспектами успешной реализации. Несмотря на свою эффективность, метод Паде не лишен некоторых ограничений, и его применение требует внимательного анализа особенностей конкретной задачи.

Дальнейшие исследования в этой области могут быть направлены на улучшение методов выбора оптимальных параметров, а также на расширение областей применения метода Паде. Перспективы развития включают в себя исследование комбинированных методов аппроксимации и использование метода Паде в современных вычислительных алгоритмах.

В целом, метод Паде представляет собой важный инструмент в арсенале численных методов, обеспечивая высокую точность и эффективность при аппроксимации различных функций.

Список источников

1. Суетин С. П. Аппроксимации Паде и эффективное аналитическое продолжение степенного ряда // Успехи математических наук. 2002. Т. 57, вып. 1. С. 45–142.
2. Березкина Л. Л. Тригонометрические аппроксимации Паде и наилучшие рациональные приближения : дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.01.01. Минск, 1988. 112 с.
3. Та Хонг Куанг. Аппроксимации Паде и асимптотики наилучших рациональных приближений : дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.01.01. Минск, 1991. 104 с.

ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО МЕТОДУ РОМБЕРГА

*Егор Михайлович Черных¹,
Дмитрий Викторович Тарасов²*

^{1,2} Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

¹ qualitylight92@gmail.com, ² tarasovdv@mail.ru

Аннотация. Описывается интеграция Ромберга, сочетающая в себе правило трапеции с экстраполяцией Ричардсона, для численного расчета определенных интегралов. Приводится численная схема и реализация практического примера.

Ключевые слова: экстраполяция Ричардсона, метод интеграции Ромберга, численное интегрирование, определенный интеграл

NUMERICAL INTEGRATION BY THE ROMBERG METHOD

Egor M. Chernykh¹, Dmitriy V. Tarasov²

^{1,2} Penza State University, Penza, Russia

¹ qualitylight92@gmail.com, ² tarasovdv@mail.ru

Abstract. The paper describes the Romberg integration, combining the trapezoid rule with Richardson extrapolation, for the numerical calculation of certain integrals. A numerical scheme and the implementation of a practical example are given.

Keywords: Richardson extrapolation, Romberg integration method, numerical integration, definite integral

Введение

Задача численного интегрирования является неотъемлемой частью курса вычислительной математики и призвана помочь найти численное значение определенного интеграла, например, в случае когда первообразная не существует [1]. В качестве примеров подобных интегралов можно указать следующие:

$\int_0^1 e^{-x^2} dx$, $\int_0^{\pi} x^{\pi} \sin(\sqrt{x}) dx$.

Для выполнения процедуры численного интегрирования обычно интервал интегрирования считается конечным и по большей части предполагаем, что подынтегральная функция непрерывная и гладкая.

Общая формула экстраполяции Ричардсона

Экстраполяция Ричардсона – это в основном простой метод повышения точности определенных численных процедур [2]. Это устраняет погрешности. Хотя он может устранять только погрешность формы:

$$E(h) = Ch^p, \quad (1)$$

где C – константа, p – порядок точности

Покажем, как погрешность устраняется с помощью экстраполяции Ричардсона. Будем полагать, что у нас есть приближенные средства вычисления некоторой величины G , а результат зависит от параметра h , так что приближение $g(h)$ определяется выражением:

$$G = g(h) + E(h).$$

Тогда произведем расчет с учетом, что имеются параметры h_1 и h_2 :

$$G = g(h_1) + Ch_1^p, \quad G = g(h_2) + Ch_2^p. \quad (2)$$

Найдем G , причем наша главная цель здесь – избавиться от величины $E(h) = Ch^p$. Для этого умножим первое уравнение формулы (2) на h_2^p и отнимем от него второе уравнение формулы (2) умноженное на h_1^p , получим:

$$G(h_2^p - h_1^p) = h_2^p g(h_1) - h_1^p g(h_2).$$

Выражая отсюда величину G , и выбирая значение h_2 равным $h_1 / 2$, получим общую формулу экстраполяции Ричардсона:

$$G = \frac{2^p g\left(\frac{h_1}{2}\right) - g(h_1)}{2^p - 1}. \quad (3)$$

Метод интеграции Ромберга

Интеграция Ромберга сочетает в себе правило трапеции с экстраполяцией Ричардсона [3; 4, с. 149].

Изложим обзор процесса интеграции подробнее. Пусть $R_{i,1} = I_i$.

1. Начинаем с расчета $R_{1,1}$ и $R_{2,1}$ с помощью правила трапеции $R_{1,1} = I_1$, $R_{2,1} = I_2$.

2. Мы имеем погрешность $C_1 h^2$, которую мы устраняем с помощью экстраполяции Ричардсона, используя $p = 2$

$$R_{2,2} = \frac{2^2 R_{2,1} - R_{1,1}}{2^2 - 1} = \frac{4}{3} R_{2,1} - \frac{1}{3} R_{1,1}$$

3. Далее получаем погрешность $C_2 h^4$, которую мы устраняем с помощью экстраполяции Ричардсона, используя $p = 4$

4. Делаем это до тех пор, пока не получим желаемое решение

Здесь общая формула Ромберга определяется выражением:

$$R_{i,j} = \begin{cases} \text{ПТ}(h_i), & \text{если } i = 1, \\ \frac{4^{j-1} R_{i,j-1} - R_{i-1,j-1}}{4^{j-1} - 1}, & \text{если } i > 1, \end{cases} \quad (4)$$

где $h = \frac{b-a}{2^{i-1}}$ (a, b – границы, i – индекс строки), ПТ – правило трапеции:

$$I = \frac{h}{2} \left[f(x_1) + 2 \sum_{i=2}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right]. \quad (5)$$

Наиболее точной оценкой интеграла всегда является последний диагональный член массива. Этот процесс продолжается до тех пор, пока разница между двумя последовательными диагональными членами не станет достаточно малой (рис. 1).

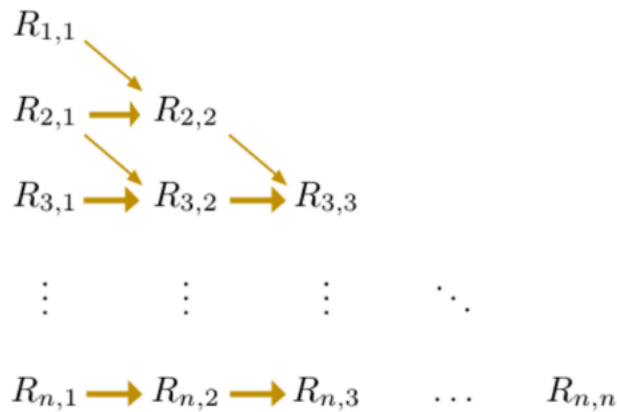


Рис. 1

Пример численного интегрирования по методу Ромберга

В качестве модельного примера рассмотрим вычисление интеграла

$\int_0^{\pi} \sin x \, dx$, так что первоначально имеем $a = x_1 = 0$, $b = x_2 = \pi$,
 $f(x) = \sin x$.

Сначала вычисляем $R_{1,1}$, и поскольку оно находится в первом столбце, мы используем правило трапеции (5): $h_1 = \pi$,

$$R_{1,1} = \frac{\pi}{2}(\sin 0 + \sin \pi) = 0$$

Мы все ещё не можем вычислить $R_{2,2}$, так как оно зависит от $R_{1,1}$ и $R_{2,1}$, поэтому

$$h_2 = \frac{\pi}{2}; x_1 = 0, x_2 = \frac{\pi}{2}, x_3 = \pi,$$

$$R_{2,1} = \frac{\pi}{4} \left[\sin 0 + 2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin \pi \right] = 1,5708.$$

Теперь мы можем вычислить $R_{2,2}$

$$R_{2,2} = \frac{4R_{2,1} - R_{1,1}}{3} = 2,0944$$

Остальное вычисляется таким же образом

$$h_3 = \frac{\pi}{4}; x_1 = 0, x_2 = \frac{\pi}{4}, x_3 = \frac{\pi}{2}, x_4 = \frac{3\pi}{2}, x_5 = \pi$$

$$R_{3,1} = \frac{\pi}{8} \left[\sin 0 + 2\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + 2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) + \sin \pi \right] = 1,8961,$$

$$R_{3,2} = \frac{4R_{3,1} - R_{2,1}}{3} = 2,0046, R_{3,3} = \frac{16R_{3,2} - R_{2,2}}{7} = 1,9986.$$

Следующая итерация

$$h_4 = \frac{\pi}{4}; x_1 = 0, x_2 = \frac{\pi}{8}, x_3 = \frac{\pi}{4}, x_4 = \frac{3\pi}{8}, x_5 = \frac{\pi}{2}, x_6 = \frac{5\pi}{8}, x_7 = \frac{6\pi}{8}, x_8 = \frac{7\pi}{8}, x_9 = \pi,$$

$$R_{4,1} = \frac{\pi}{16} \left[\sin 0 + 2\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) + 2\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + 2\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) + 2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + 2\sin\left(\frac{5\pi}{8}\right) + 2\sin\left(\frac{6\pi}{8}\right) + 2\sin\left(\frac{7\pi}{8}\right) + \sin \pi \right] = 1,9742,$$

$$R_{4,2} = \frac{4R_{4,1} - R_{3,2}}{3} = 2,0003, R_{4,3} = \frac{16R_{4,2} - R_{3,2}}{7} = 2,0000$$

$$R_{4,4} = \frac{4^3 R_{4,3} - R_{3,3}}{4^3 - 1} = 2,0000.$$

Следовательно, оно сходится в $R_{4,4}$ и окончательно получаем

$$\int_0^{\pi} \sin x dx \approx R_{4,4} = 2,0000.$$

Таким образом, общий шаблон решения, по построению матрицы R (см. рис. 1), имеет вид:

1. Вычислить h .
2. Вычислить первый столбец первых двух строк, используя правило трапеции.
3. Вычислить следующие столбцы в этой строке, используя формулу Ромберга для $i > 1$.
4. Повторить шаги 1–3 для каждой строки, пока она не приблизится к необходимому решению.

Выводы

Данный метод сочетает в себе как классический метод трапеций, так и экстраполяцию Ричардсона, которая позволяет уменьшать погрешность, не прибегая для этого к значительным вычислительным затратам. Подобный подход может оказаться эффективным в тех случаях, когда интегралы вычисляются от функций, содержащих особенность.

Список литературы

1. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы. М. : Наука, 1989. 432 с.
2. Engineering at Alberta. Open educational resources. Numerical integration: Romberg's method. URL: <https://engcourses-uofa.ca/books/numerical-analysis/numerical-integration/rombergs-method/> (дата обращения: 10.10.2023).
3. Хемминг Р. В. Численные методы для научных работников и инженеров : [пер. с англ.]. 2-е изд., испр. М. : Наука, 1972. 400 с.
4. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. 3-е изд., перераб. и доп. М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2003. 632 с.

АНАЛИЗ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ В ЭКОНОМИКЕ И ФИНАНСАХ

*Наталья Васильевна Зверовщикова¹, Ирина Михайловна Мойко²,
Вадим Сергеевич Шатов³*

^{1,2,3} Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

¹ nvz.matematika@yandex.ru, ² irmojko@yandex.ru,

³ shatovshatov2528cs@gmail.com

Аннотация. Посвящена исследованию зависимости экономической науки, в том числе финансовой грамотности, от использования методов исследования временных рядов. Временные ряды являются основным инструментом экономической науки и определяют статистические данные, при аккумулировании которых специалисты могут грамотно распоряжаться ресурсами организации и составить прогноз на развитие дела. В анализе статистических данных имеют место компоненты временных рядов, а также методы и модели их оценки, которые, в свою очередь, могут упростить сбор информации или же сделать его более объемным.

Ключевые слова: временной ряд, прогноз, тренд, сезонность, циклы, остатки, скользящее среднее, экспоненциальное сглаживание, ARIMA, авторегрессия, интеграция, машинное обучение, модель

TIME SERIES ANALYSIS AND ITS APPLICATION IN ECONOMICS AND FINANCE

*Natalia V. Zverovshchikova¹, Irina M. Moiko²,
Vadim S. Shatov³*

^{1,2,3} Penza State University, Penza, Russia

¹ nvz.matematika@yandex.ru, ² irmojko@yandex.ru,

³ shatovshatov2528cs@gmail.com

Abstract. This article is devoted to the study of the dependence of economic science, including financial literacy, on the use of time series research methods. Time series are the main tool of economic science and determine statistical data, by accumulating which, specialists can competently manage the organization's resources and make a forecast for the development of the business. In the analysis of statistical data, there are components of time series, as well as methods and models for their assessment, which, in turn, can simplify the collection of information or make it more voluminous.

Keywords: time series, forecast, trend, seasonality, cycles, residuals, moving average, exponential smoothing, ARIMA, autoregression, integration, machine learning, model

Введение

В современном мире экономики, где информация является важнейшим ресурсом, а принятие грамотных решений играет решающую роль, анализ временных рядов выдвигается на передний план как неотъемлемый инструмент. Экономическая наука нашла в этом методе свой главный союзник, позволяя раскрывать скрытые закономерности в статистических данных, прогнозировать будущее и оценивать влияние различных факторов на экономические и финансовые явления.

Анализ временных рядов, как основной инструмент экономической науки

Анализ временных рядов открывает экономистами возможность исследовать тренды, циклы и сезонные паттерны в данных, а также разбираться во влиянии случайных факторов. Применение разнообразных методов, таких как скользящее среднее, экспоненциальное сглаживание, ARIMA и методы машинного обучения, позволяет разбираться в структуре временных рядов и выявлять их компоненты, что в свою очередь дает возможность принимать информированные решения, управлять рисками, оптимизировать ресурсы и прогнозировать будущее в экономике и финансах. Таким образом, анализ временных рядов становится неотъемлемой частью современной экономической науки и успешного управления финансовыми процессами.

Разумное управление ресурсами и финансами имеет огромное значение в современном мире. Компании и даже частные лица сталкиваются с постоянно изменяющимися условиями, которые влияют на финансовое благополучие. Особенно важно иметь способность адаптироваться к переменам и принимать обоснованные решения на основе доступных данных. Анализ временных рядов позволяет изучать данные, накопленные во времени, и выявлять паттерны, тенденции и колебания. Понимание этих факторов помогает в прогнозировании будущих событий и тенденций, что является фундаментальным аспектом успешного управления финансами. Анализ временных рядов предоставляет инструменты для принятия обоснованных решений на многих уровнях, будь то в бизнесе, экономике, инвестициях или даже в частных финансах. Этот метод анализа данных позволяет увидеть, как различные факторы влияют на прошлое и могут влиять на будущее. В результате, он становится неотъемлемой частью стратегического планирования и принятия решений в сфере финансов и экономики.

Временной ряд – это последовательность наблюдений или измерений, сделанных в разные моменты времени. Эти наблюдения могут представлять собой численные значения, факты или данные, полученные с определенной периодичностью или в случайный момент времени. В анализе временных рядов исследователи стремятся выявить

закономерности, тренды и сезонные колебания, а также прогнозировать будущие значения на основе исторических данных. Эти закономерности и сам анализ временных рядов, в основном, необходимы для того, чтобы делать прогноз. В экономике и финансах прогнозирование играет центральную роль. Оно позволяет адаптироваться к изменяющейся среде, принимать решения на основе данных и минимизировать риски. В экономике прогнозы ВВП, инфляции, безработицы и других экономических показателей помогают правительствам и компаниям разрабатывать бюджеты, планировать стратегии развития и стимулировать экономический рост. Они также помогают предупреждать экономические кризисы и поддерживать стабильность.

Компоненты и методы анализа временного ряда

Важную роль в составлении экономического прогноза играют компоненты статистического ряда и методы анализа данных.

Компоненты временного ряда – это отдельные структурные элементы, на которые можно разбить временной ряд данных с целью лучшего понимания его структуры и характеристик.

Методы анализа данных – это структурированный набор статистических и вычислительных подходов, используемых для изучения и понимания поведения временных рядов данных. Эти методы включают в себя статистические модели, временные ряды, методы прогнозирования и техники сглаживания данных.

Определение компонентов статистического ряда и применение методов для анализа информации становится удобнее при графическом представлении данных. Визуальное представление временного ряда обычно включает в себя график, на котором по оси X отложено время или даты, а по оси Y – соответствующие значения переменных.

Специалисты выделяют четыре основных компонента статистических рядов:

1 Тренд – долгосрочная общая тенденция изменения данных во времени, является одним из ключевых компонентов анализа временных рядов в экономике и финансах. Тренд может быть как восходящим, указывая на постепенное увеличение значений данных со временем, так и нисходящим, что означает постепенное снижение значений. Также тренд может быть плоским, когда отсутствует значительное общее изменение. Анализ тренда позволяет выявить долгосрочные изменения и предсказать, в каком направлении будут двигаться данные в будущем. Это полезное умение для инвесторов, экономистов и бизнес-аналитиков, так как тренд может указывать на важные изменения в экономике и рынке, помогая принимать обоснованные решения.

2 Сезонность – периодические колебания или циклические паттерны в данных, которые повторяются с постоянным интервалом времени, как правило, внутри одного года. Анализ сезонности позволяет

выявить и учесть регулярные паттерны в данных, что полезно для прогнозирования и принятия решений. Понимание сезонных колебаний позволяет более точно оценивать влияние сезонных факторов на данные и адаптировать стратегии к сезонным изменениям, что важно для бизнеса и инвестиций.

3 Циклы – более длительные и менее регулярные колебания в данных, которые могут повторяться через длительные временные интервалы. Анализ циклов означает выявление и изучение периодических колебаний, которые могут влиять на экономическую активность и ценовую динамику. Такой анализ позволяет понимать влияние циклических факторов на рынки, прогнозировать будущие изменения и адаптировать стратегии в зависимости от циклических колебаний.

4 Остатки, или остаточные значения – компонент, который остается после выделения тренда, сезонности и циклических факторов. Они представляют собой непрогнозируемые случайные колебания, шум или изменения, которые не могут быть объяснены другими компонентами временного ряда. Остатки часто содержат случайные флуктуации и несистематические изменения, которые могут быть вызваны различными факторами, включая случайные события, внешние воздействия или другие переменные, которые не учтены в моделях. Анализ остатков важен, потому что он позволяет определить, насколько хорошо модель объясняет данные, и может выявить непредсказуемые аномалии или изменения. Также они могут быть использованы для диагностики моделей временных рядов, оценки их точности и улучшения прогнозов. Понимание остатков помогает исследователям и аналитикам разрабатывать более надежные и точные модели для анализа и прогнозирования экономических и финансовых данных. Выявление компонентов облегчают различные методы анализа статистических данных. В процессе оценки информации часто строятся модели, с помощью которых возможны промежуточные прогнозы, чтобы избежать вычислений на однотипных участках временного ряда, а также итоговые прогнозы [1, 2, 3].

Методы анализа временных рядов

1 *Метод скользящего среднего (Moving Average)* – это один из простейших и широко используемых методов анализа временных рядов в экономике и финансах. Метод предназначен для сглаживания временного ряда и выявления общих трендов и паттернов в данных путем вычисления средних значений на основе определенного окна или периода времени.

Основные черты скользящего среднего:

– Сглаживание данных: метод предполагает вычисление средних значений для определенного числа последовательных наблюдений во временном ряду. Это помогает устранить краткосрочные шумы и случайные флуктуации, делая более видимыми общие тенденции.

– Окно скользящего среднего: одной из важных характеристик этого метода является выбор размера окна (или периода), на основе которого вычисляется среднее значение. Этот параметр может быть адаптирован в зависимости от того, насколько сглаженными или реактивными должны быть результаты анализа.

– Выявление тренда: метод скользящего среднего может помочь выявить общий тренд в данных, такой как восходящий (рост), нисходящий (спад) или плоский (отсутствие явного тренда).

– Простота и доступность: метод скользящего среднего прост в применении и не требует специальных статистических навыков, поэтому широко используется как инструмент для предварительного анализа временных рядов.

Метод скользящего среднего может быть полезен для изучения долгосрочных трендов, а также для выявления общих паттернов в финансовых данных, таких как цены на акции, валютные курсы и экономические показатели. Он также может быть частью более сложных моделей и методов анализа временных рядов.

2. *Экспоненциальное сглаживание* - это метод анализа временных рядов, который использует взвешенные средние для сглаживания данных и прогнозирования будущих значений. Метод уделяет большее внимание последним наблюдениям, придавая им больший вес, что делает его особенно полезным для данных, в которых тренды и паттерны меняются со временем.

Основные черты экспоненциального сглаживания

– Взвешенное сглаживание: в отличие от метода скользящего среднего, где все наблюдения имеют одинаковый вес, экспоненциальное сглаживание наделяет более поздние наблюдения большим весом, что делает его более реактивным к последним изменениям в данных.

– Уровень и скорость изменения: экспоненциальное сглаживание моделирует данные как комбинацию уровня (уровня базовых значений), скорости изменения (тренда) и случайных ошибок (остатков).

– Константы сглаживания: в экспоненциальном сглаживании используются константы сглаживания, которые определяют веса для последних наблюдений. Существует несколько разновидностей экспоненциального сглаживания, такие как простое экспоненциальное сглаживание, двойное экспоненциальное сглаживание и другие, каждое из которых имеет свои параметры. Экспоненциальное сглаживание может быть применено для анализа и прогнозирования различных данных, включая продажи, цены на акции, экономические показатели и другие временные ряды. Он позволяет учесть последние изменения в данных и реагировать на изменяющиеся тренды, что полезно для принятия решений и планирования.

3. *ARIMA* – это метод анализа временных рядов, который используется в экономике и финансах для моделирования, прогнозирования

и анализа статистических данных. Этот метод комбинирует компоненты авторегрессии, разностей и скользящего среднего для описания сложных закономерностей в данных временных рядов.

Основные черты метода ARIMA

– Авторегрессия (AR): компонента AR предполагает, что текущее значение временного ряда зависит от предыдущих значений ряда. Это позволяет учитывать автокорреляцию в данных, где текущее значение может быть связано с прошлыми значениями.

– Разности (I – Integrated): компонента I представляет собой интегрирование временного ряда, что означает, что он приводится к стационарному состоянию. Интегрирование может включать разные порядки разностей, чтобы сделать ряд стационарным.

– Скользящее среднее (MA): компонента MA учитывает случайные ошибки и шум в данных путем усреднения последних значений ряда. Это позволяет учесть случайную изменчивость.

Вышеизложенные черты образуют параметры ARIMA: p (порядок авторегрессии), d (порядок интеграции) и q (порядок скользящего среднего). Определение оптимальных значений этих параметров требует анализа и выбора наилучшей модели. Указанные модели могут быть использованы для анализа и прогнозирования временных рядов в экономике и финансах, таких как цены на акции, курсы валют, макроэкономические показатели и многие другие. Эти модели позволяют учесть, как краткосрочные, так и долгосрочные зависимости в данных, что делает их мощным инструментом для принятия решений и планирования.

4. *Метод машинного обучения (Machine Learning, ML)* – раздел искусственного интеллекта, который использует алгоритмы и статистические модели для создания компьютерных систем, способных «учиться» на основе данных и делать прогнозы или принимать решения без явного программирования. В контексте анализа временных рядов в экономике и финансах, методы машинного обучения предоставляют мощный инструмент для моделирования и прогнозирования сложных паттернов и зависимостей.

Основные черты методов машинного обучения для временных рядов

– Обучение на данных: Модели машинного обучения требуют больших объемов исторических данных временных рядов для обучения. Эти данные используются для выявления скрытых закономерностей и обучения модели на примерах.

– Разнообразие моделей. Машинное обучение предоставляет разнообразные модели, включая регрессию, случайные леса, нейронные сети, метод опорных векторов и другие. Это позволяет выбрать наилучшую модель, учитывая характер временного ряда.

– Учет множества факторов. Методы машинного обучения могут учитывать множество входных признаков и переменных, что позволяет моделировать сложные зависимости и влияния факторов на временной ряд.

– Прогнозирование и классификация. Машинное обучение позволяет не только прогнозировать будущие значения временных рядов, но также классифицировать данные, выявлять аномалии, делать кластеризацию и многое другое.

– Автоматизация. Модели машинного обучения могут автоматически адаптироваться к изменениям в данных, что делает их подходящими для динамических и изменяющихся сред. Применение данного метода позволяет анализировать и интерпретировать огромные объемы данных и выявлять сложные зависимости, что помогает в принятии более информированных решений в области экономики и финансов.

Помимо вышеперечисленных методов анализа и оценки статистических данных выделяют еще метод Гарча, бутстреп-методы, ряды с вейлет-преобразованием и другие. Дело в том, что ведущие методы, применяемые специалистами наиболее часто, уже включают в себя основные инструменты других методов. Так ARIMA содержит в себе принцип сглаживания, который присущ методам скользящего среднего и экспоненциального сглаживания. Но данный факт никак не отягощает работу с динамическими рядами, напротив, для аналитика открывается большой кругозор возможностей оценки информации. Итогом анализа статистических данных является создание модели, исходя из которой делается прогноз. Чтобы оценить практическую значимость модели, необходимо сравнить результирующую сводку данных с прогнозируемой. При малых расхождениях можно говорить об успешности прогноза. Чем больше разница между значениями, тем в большей доработке нуждается модель.

Заключение

Анализ временных рядов представляет собой мощный инструмент в экономической науке, позволяющий выявить скрытые закономерности и тренды в статистических данных. Путем применения различных методов мы можем выделить компоненты и оценить их влияние на временной ряд.

Анализ временных рядов позволяет нам не только понимать прошлое, но и прогнозировать будущее. Мы можем управлять рисками, определять оптимальные стратегии, принимать информированные решения в финансовых и экономических областях, а также грамотно распоряжаться ресурсами. Этот подход помогает предпринимателям, инвесторам и организациям создавать более устойчивые и успешные бизнес-процессы, что является ключевым элементом в современном мире экономики и финансов.

Список литературы

1. Кильдишев Г. С., Френкель А. А. Анализ временных рядов и прогнозирование. М. : Статистика, 1973. 102 с.
2. Афанасьев В. Н., Юзбашев М. М. Анализ временных рядов и прогнозирование : учебник. М. : Финансы и статистика, 2001. 228 с.
3. Канторович Г. Г. Анализ временных рядов // Экономический журнал ВШЭ. 2003. № 1. С. 79–103.

ИСКУССТВЕННЫЙ ИНТЕЛЛЕКТ: ОСНОВНЫЕ КОНЦЕПЦИИ, ПРИМЕНЕНИЕ И ЭТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ

*Наталья Валентиновна Мойко¹,
Наталья Васильевна Зверовщикова²,
Елизавета Владиславовна Шишканова³*

^{1,2,3} Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

¹ nataliyavalentinovna@yandex.ru, ² nvz.matematika@yandex.ru,

³ liza_shishkanova05@mail.ru

Аннотация. Рассматриваются основные концепции и методы машинного обучения, глубокого обучения и нейронных сетей, а также их применение в различных областях, таких как компьютерное зрение, обработка естественного языка и робототехника. Также обсуждаются актуальные вопросы этики и безопасности в развитии искусственного интеллекта.

Ключевые слова: искусственный интеллект, машинное обучение, глубокое обучение, этические вопросы искусственного интеллекта

ARTIFICIAL INTELLIGENCE: BASIC CONCEPTS, APPLICATIONS AND ETHICAL ISSUES

*Natalia V. Moiko¹, Natalia V. Zverovshchikova²,
Elizaveta V. Shishkanova³*

^{1,2,3} Penza State University, Penza, Russia

¹ nataliyavalentinovna@yandex.ru, ² nvz.matematika@yandex.ru,

³ liza_shishkanova05@mail.ru

Abstract. In this article, we will review the basic concepts and techniques of machine learning, deep learning, and neural networks, and their applications in various fields such as computer vision, natural language processing, and robotics. We will also discuss current issues of ethics and safety in the development of AI.

Keywords: artificial intelligence, machine learning, deep learning, ethical issues in artificial intelligence

Введение

Современный мир невозможно представить без искусственного интеллекта. Искусственный интеллект (ИИ) – это область информатики, которая занимается созданием компьютерных систем, способных выполнять задачи, которые обычно требуют человеческого интеллекта.

Ключевые концепции и методы искусственного интеллекта
– Нейронные сети (Neural Networks).

Концепция. Нейронные сети моделируют работу человеческого мозга, состоящего из искусственных нейронов, чтобы обучаться и выполнять задачи, такие как классификация и прогнозирование.

Методы. Многослойные нейронные сети, сверточные нейронные сети (CNN) для анализа изображений, рекуррентные нейронные сети (RNN) для обработки последовательных данных.

– Глубокое обучение (Deep Learning).

Концепция. Это подраздел машинного обучения, в котором многократные слои нейронных сетей (глубокие нейронные сети) используются для извлечения и анализа сложных иерархических признаков из данных.

Методы. Глубокие нейронные сети, такие как глубокие сверточные сети (CNN) и рекуррентные нейронные сети (RNN), а также архитектуры, такие как GANs (Generative Adversarial Networks) и автокодировщики.

– Управляемое обучение (Supervised Learning).

Концепция. В управляемом обучении алгоритм обучается на основе исходных данных и соответствующих им целевых меток. Это используется для задач классификации и регрессии.

Методы. Линейная регрессия, метод ближайших соседей (K-Nearest Neighbors), метод опорных векторов (Support Vector Machines), нейронные сети для классификации.

– Без учителя (Unsupervised Learning).

Концепция. В этом случае алгоритмы обучения используются для анализа данных без предоставления целевых меток. Это может использоваться для кластеризации и извлечения скрытых структур в данных.

Методы. Кластеризация К-средних (K-Means), анализ главных компонент (PCA), автокодировщики для извлечения признаков.

– Усиление (Reinforcement Learning).

Концепция. В усилении алгоритм обучается взаимодействуя с окружающей средой, получая награды или наказания в зависимости от своих действий. Это используется для обучения агентов, принимающих последовательные решения.

Методы. Q-обучение (Q-Learning), алгоритмы глубокого усиления (Deep Reinforcement Learning) с использованием нейронных сетей.

Это лишь небольшой обзор ключевых концепций и методов искусственного интеллекта. ИИ постоянно развивается, и новые методы и технологии появляются для решения разнообразных задач [1, 2].

Основные концепции и методы машинного обучения

Машинное обучение (МО) – это методика программирования компьютеров, которая позволяет им обучаться на основе данных, а не на основе жестко заданных правил. Основная идея МО заключается в том, что компьютер может научиться решать определенную задачу,

если ему предоставить достаточное количество данных и алгоритм обучения.

Существует несколько типов МО, включая обучение с учителем, обучение без учителя и обучение с подкреплением. Обучение с учителем – это метод, при котором компьютер получает на вход данные и соответствующие им метки (например, изображения и их описания). Затем компьютер использует эти данные для обучения и создания модели, которая может классифицировать новые данные. Обучение без учителя – это метод, при котором компьютер получает только данные, но не метки. Он используется для поиска скрытых закономерностей в данных. Обучение с подкреплением – это метод, при котором компьютер получает награду за правильные решения и штраф за неправильные решения. Этот метод используется для обучения компьютера принимать решения в динамических средах.

Глубокое обучение и нейронные сети

Глубокое обучение – это метод машинного обучения, который использует многослойные нейронные сети для анализа данных. Нейронная сеть – это математическая модель, которая имитирует работу нервной системы человека. Она состоит из множества нейронов, которые связаны между собой и передают сигналы друг другу.

Глубокие нейронные сети состоят из множества слоев, каждый из которых выполняет определенную функцию. Например, первый слой может выполнять функцию обработки изображения, а последний слой – функцию классификации. Каждый слой обучается на основе данных, которые проходят через сеть. Глубокое обучение позволяет создавать модели, которые способны решать сложные задачи, такие как распознавание речи, обработка естественного языка и компьютерное зрение.

Применение глубокого обучения и нейронных сетей

Глубокое обучение и нейронные сети нашли широкое применение в различных областях. Вот некоторые из них:

- Компьютерное зрение. Область ИИ, которая занимается анализом изображений и видео. С помощью глубокого обучения и нейронных сетей компьютер может распознавать объекты на изображениях, определять их позицию и классифицировать. Это находит применение в таких областях, как автоматическое распознавание лиц, медицинская диагностика и автономные автомобили.

- Робототехника – это область ИИ, которая занимается созданием автономных роботов. С помощью глубокого обучения и нейронных сетей роботы могут обучаться выполнять определенные задачи, такие как перемещение по пространству, распознавание объектов и взаимодействие с людьми.

- Компьютерное зрение (Computer Vision):
- Распознавание объектов и лиц: Нейронные сети используются для автоматического распознавания объектов на изображениях, включая лица людей.
- Сегментация изображений: Глубокое обучение помогает выделять разные объекты на изображении и проводить их сегментацию.
- Обработка естественного языка (Natural Language Processing, NLP). Эта область ИИ, которая занимается анализом и пониманием естественного языка. С помощью глубокого обучения и нейронных сетей компьютер может распознавать и классифицировать тексты, переводить тексты на другие языки и создавать чат-ботов.
- Машинный перевод: Нейронные сети улучшили качество машинного перевода, позволяя автоматически переводить текст с одного языка на другой.
- Анализ текста. Используется для анализа и классификации текста, например, в задачах определения тональности, выделения ключевых фраз и именованных сущностей.
- Рекомендательные системы. Персонализированные рекомендации: нейронные сети помогают платформам рекомендовать продукты, фильмы, музыку и другие контенты, учитывая предпочтения пользователя.
- Автоматическое управление и робототехника. Автопилоты для автомобилей: Нейронные сети используются в автономных транспортных средствах для распознавания дорожной обстановки и принятия решений о движении.
- Управление роботами. Глубокое обучение позволяет роботам обучаться и адаптироваться к различным задачам.
- Медицина. Диагностика и анализ изображений: Нейронные сети помогают врачам выявлять заболевания на медицинских изображениях, таких как рентгены и снимки МРТ.
- Прогнозирование заболеваний: Используется для прогнозирования риска развития заболеваний и выбора оптимальных методов лечения.
- Финансовая аналитика. Прогнозирование рынка: Нейронные сети используются для прогнозирования движений цен на финансовых рынках и определения оптимальных инвестиций.
- Промышленность и производство. Качество контроля продукции. Глубокое обучение помогает автоматически выявлять дефекты на производственных лентах и повышать качество продукции.
- Автоматизация обслуживания клиентов. Чат-боты и виртуальные ассистенты: Нейронные сети используются для создания чат-ботов и виртуальных ассистентов, которые могут взаимодействовать с клиентами.

– Биоинформатика. Анализ геномов: нейронные сети могут помочь в анализе геномных данных и выявлении генетических паттернов.

– Искусство и развлечения. Генерация контента: нейронные сети могут создавать искусство, музыку, и даже сценарии для фильмов и видеоигр.

Это только небольшой обзор областей, в которых глубокое обучение и нейронные сети активно применяются. Эти технологии продолжают развиваться и находить новые применения в различных сферах жизни.

Этика и безопасность в развитии ИИ

Развитие ИИ вызывает ряд этических вопросов. Например, возможность использования ИИ в качестве оружия, угроза замены человека на машину в определенных профессиях и потенциальная угроза конфиденциальности данных. Для решения этих проблем необходимо разработать соответствующие правила и законы, которые бы регулировали развитие ИИ. Это могут быть как международные договоренности, так и национальные законы. Этика и безопасность в развитии и применении искусственного интеллекта (ИИ) играют критическую роль, их учет необходим для обеспечения безопасности, справедливости и эффективности ИИ-систем. Вот некоторые ключевые аспекты, которые следует учитывать:

– Прозрачность и объяснимость. Развивая ИИ, важно делать его решения прозрачными и объяснимыми. Это поможет пользователям и разработчикам понимать, как ИИ принимает решения и почему.

– Справедливость и беспристрастность. ИИ не должен допускать дискриминации по признакам расы, пола, возраста и другим характеристикам. Разработчики должны стремиться к созданию справедливых алгоритмов и избегать укрепления предвзятости.

– Приватность и защита данных. Сбор и использование данных пользователя должны соответствовать законам о защите данных. Разработчики ИИ должны обеспечивать адекватную защиту конфиденциальности данных.

– Безопасность. ИИ может быть уязвим к кибератакам и злоупотреблениям. Защита от угроз и уязвимостей должна быть приоритетом при разработке и внедрении ИИ.

– Ответственность. Компании и организации, разрабатывающие и применяющие ИИ, должны нести ответственность за его действия. Это включает в себя учет этических и правовых аспектов.

– Сотрудничество и обучение. Распространение знаний и обучение в области этики ИИ являются важными шагами для обеспечения безопасного и этичного использования ИИ.

– Законодательство и регулирование. Необходимо разрабатывать законы и нормативные акты, которые учитывают этические аспекты ИИ, и регулировать его применение.

– Мониторинг и обратная связь: Разработчики и организации должны постоянно мониторить работу ИИ и принимать обратную связь от пользователей и общества для улучшения его этических аспектов.

Исследование и обсуждение этических вопросов и вопросов безопасности, связанных с ИИ, являются важными шагами на пути к созданию технологии, которая приносит пользу человечеству и не вредит ему.

Заключение

Искусственный интеллект (ИИ) – это фундаментальное направление в современной науке и технологиях, которое оказывает значительное воздействие на общество, экономику и культуру. В этой статье мы рассмотрели основные концепции, применение и этические вопросы, связанные с искусственным интеллектом. Основные концепции ИИ включают в себя машинное обучение, нейронные сети, алгоритмы, способности к анализу данных и принятию решений, а также способность к автоматизации задач, которые ранее требовали человеческого участия. Эти концепции играют ключевую роль в развитии ИИ и его применении. Однако с ростом применения ИИ возникают и этические вопросы. Основные из них связаны с прозрачностью и объяснимостью алгоритмов, приватностью данных, автоматизацией рабочих мест и вопросами ответственности при возможных ошибках ИИ. Искусственный интеллект предоставляет огромные возможности, но также несет в себе риски. Для обеспечения устойчивого развития ИИ необходимо внимательно рассматривать этические аспекты и строить системы, которые соблюдают принципы справедливости, прозрачности и безопасности. В заключении, искусственный интеллект продолжит развиваться, проникая во все сферы человеческой жизни. Мы должны использовать его потенциал для достижения блага общества, при этом соблюдая высокие стандарты этики и безопасности.

Список литературы

1. Тегмарк М. Жизнь 3.0. Быть человеком в эпоху искусственного интеллекта. М. : АСТ, 2019. 580 с.
2. Рассел С., Норвиг П. Искусственный интеллект. Современный подход. Т. 1. Решение проблем. Знания и рассуждения. СПб. : Диалектика, 2021. 704 с.

ПРОБЛЕМЫ МНОГОФАКТОРНОГО АНАЛИЗА

*Ангелина Денисовна Яковлева¹,
Татьяна Вячеславовна Черушева²*

^{1,2} Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

¹ gelya.yakovleva.2001@bk.ru, ² tank1100@yandex.ru

Аннотация. Рассмотрены различные критерии принятия нулевой гипотезы при обработке статистических данных.

Ключевые слова: дисперсионный анализ, фактор, нулевая гипотеза, многофакторный анализ

PROBLEMS OF MULTIVARIATE ANALYSIS

Angelina D. Yakovleva¹, Tatyana V. Cherusheva²

^{1,2} Penza State University, Penza, Russia

¹ gelya.yakovleva.2001@bk.ru, ² tank1100@yandex.ru

Abstract. Various criteria for the acceptance of the null hypothesis in the processing of statistical data are considered.

Keywords: analysis of variance, factor, null hypothesis, multivariate analysis

Введение

Дисперсионный анализ или в англо-язычной литературе ANalysis Of VAriance (ANOVA), дословно «анализ дисперсии» - один из самых распространенных методов статистического анализа в психологии, биологии, медицине и многих других дисциплинах. Дисперсионный анализ состоит в выделении и оценке отдельных факторов, вызывающих изменчивость среднего значения наблюдаемой случайной величины [1, 2].

Дисперсионный анализ позволяет принять или опровергнуть гипотезу о значимости влияния исследуемого фактора на изменчивость среднего значения наблюдаемой случайной величины. Таким образом, речь идет о нулевой гипотезе: все значения в выборке распределены нормально и одинаково, то есть рассматриваемые факторы не оказывают на наблюдаемую величину существенного влияния.

Факторный анализ – это процедура, с помощью которой большое число переменных, относящихся к имеющимся наблюдениям, сводят к меньшему количеству независимых влияющих величин, называемых факторами: в один фактор объединяются переменные, сильно коррелирующие между собой.

Если исследуется влияние одного фактора, то речь идет о простой группировке – однофакторном анализе или One-Way ANOVA. Однофакторный дисперсионный анализ проводится для выявления влияния одной переменной на другую. При этом одна из переменных является независимой и должна быть порядковой или номинальной. А другая – зависимой и метрической. Данный вид анализа проверяет верность гипотезы, согласно которой средние величины более чем в двух группах равны.

При одновременном исследовании влияния нескольких факторов анализ называется многофакторным или Mylti-Way ANOVA. Многофакторный дисперсионный анализ – это статистический метод анализа результатов наблюдений, зависящих от различных одновременно действующих факторов, выбор наиболее важных из них и оценка их влияния. Суть анализа заключается в разложении общей дисперсии случайной величины на независимые слагаемые, каждое из которых характеризует влияние того или иного фактора или их взаимодействие.

На практике можно встретить One-Way ANOVA (однофакторную ANOVA) довольно редко. Обычно в исследованиях встречается многофакторный дисперсионный анализ, в котором проверяется влияние сразу нескольких факторов.

Основные задачи многофакторного анализа: определение взаимосвязей между переменными (классификация переменных), или, другими словами, «объективная R-классификация»; сокращение числа переменных, необходимых для описания данных.

Многофакторный дисперсионный анализ служит инструментом исследования влияния набора факторов, являющихся качественными переменными, на зависимую количественную переменную (объем и частота покупок, размер дохода, потребительская оценка, рейтинг фирмы и др.). В роли качественных переменных могут выступать характеристики как потребителей (например, пол, возраст, уровень дохода), так и самой фирмы (интенсивность и концепция рекламной кампании, варианты упаковки, географическое расположение). В качестве факторов могут быть рассмотрены и внешние влияния, такие как экономическая ситуация в стране, ее климатические и культурные особенности, время года.

Критерий Фишера

Критерий Фишера основывается на анализе дисперсии и позволяет выявить статически значимые различия между группами [1].

Для указанных выборок объемом I_1 и I_2 необходимо получить оценки дисперсии S_1^2 и S_2^2 :

$$S_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^{I_1} (x_{1i} - \bar{x}_1)^2}{I_1 - 1}; S_2^2 = \frac{\sum_{i=1}^{I_2} (x_{2i} - \bar{x}_2)^2}{I_2 - 1}.$$

Затем вычисляется статистика Фишера:

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2}, \text{ причем } S_1^2 > S_2^2.$$

Пусть $F_{(I_1-1), (I_2-1)} > F_\alpha$, тогда нулевая гипотеза о том, что выборки принадлежат одной генеральной совокупности, отвергается.

Однофакторный анализ – One-Way ANOVA

Исследуется влияние фактора A .

Обозначения:

y_{ij} – отклик, полученный для i -го фактора A в j -м эксперименте (репликации или реплике).

$i = 1, 2, \dots, I$; I – число уровней фактора A ;

$j = 1, 2, \dots, J$; J – число репликаций для каждого уровня.

Общее число опытов, то есть объем выборки IJ .

Модель, описывающая влияние фактора A на отклик, следующая:

$$y = \mu + \alpha A + \varepsilon,$$

где μ – постоянная составляющая; α – коэффициент регрессии; ε – случайная составляющая, имеющая смысл ошибки измерения отклика.

Дополнительные обозначения представлены в табл. 1.

Таблица 1

Реплика j	Уровни фактора A						
	1	2	...	i	...	I	
1	y_{11}	y_{12}		y_{1i}		y_{1I}	
2	y_{21}	y_{22}		y_{2i}		y_{2I}	
.	.	.	.	.	.	.	
.	.	.	.	.	.	.	
.	.	.	.	.	.	.	
J	y_{J1}	y_{J2}		y_{Ji}		y_{JI}	
Среднее	$y_{1.}$	$y_{2.}$		$y_{i.}$		$y_{I.}$	$y_{..}$

где $y_{i.}$ – среднее значение отклика в i -й группе (для i -го уровня) фактора A , $y_{..}$ – среднее значение отклика в выборке.

Расчет оценок дисперсий производится далее на основании следующих соотношений, позволяющих вычислить составляющие сумм квадратов отклонений.

$$y_{ij} - y_{..} = (y_{i.} - y_{..}) + (y_{ij} - y_{i.}), \text{ тогда}$$

$$\sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I (y_{ij} - y_{..})^2 = \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I (y_{i.} - y_{..})^2 + \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I (y_{ij} - y_{i.})^2.$$

Значения статистики Фишера (табл. 2).

Таблица 2

S – сумма квадратов	Число степеней свободы	Оценка дисперсии	F – статистика Фишера
$S = \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I (y_{ij} - y_{..})^2$	$IJ - 1$	$MS = \frac{S}{IJ - 1}$	
$S_A = J \sum_{i=1}^I (y_{i.} - y_{..})^2$	$I - 1$	$MS_A = \frac{S_A}{I - 1}$	$\frac{MS_A}{MS_R}$
$S_R = \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I (y_{ij} - y_{i.})^2$	$IJ - I$	$MS_R = \frac{S_R}{IJ - I}$	

Если $\frac{MS_A}{MS_R} > F_{(I-1), (J-1)}$ для заданного уровня значимости, то нулевая гипотеза о несущественности влияния фактора A отвергается.

Многофакторный анализ – Mylti-Way ANOVA

Если исследуют действие двух, трёх и более факторов, то структура дисперсионного анализа та же, что и при однофакторном анализе, усложняются лишь вычисления.

Рассмотрим пример двойной группировки данных при проведении двухфакторного эксперимента, устанавливающего степень существенности влияния факторов A и B . Предполагается следующая модель влияния факторов на отклик:

$$y = \mu + \alpha_A A + \alpha_B B + \varepsilon.$$

Обозначения:

$i = 1, 2, \dots, I$; I – число уровней фактора A ;

$j = 1, 2, \dots, J$; J – число уровней фактора B .

В данном случае рассматриваются две нулевые гипотезы, каждая о несущественности влияния соответствующего фактора.

Формула для расчета квадратов отклонений следующая:

$$\begin{aligned}
 S &= S_A + S_B + S_R; \\
 \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I (y_{ij} - y_{..})^2 &= \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I (y_{i.} - y_{..})^2 + \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I (y_{.j} - y_{..})^2 + \\
 &+ \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I (y_{ij} - y_{.j} - y_{i.} + y_{..})^2.
 \end{aligned}$$

Очевидно, что

$$S_A = J \sum_{i=1}^I (y_{i.} - y_{..})^2;$$

$$S_B = I \sum_{j=1}^J (y_{.j} - y_{..})^2.$$

Расчет оценок дисперсий и значений статистики Фишера подробно расписан в табл. 3.

Таблица 3

S – сумма квадратов	Число степеней свободы	Оценка дисперсии	F – статистика Фишера
$S = \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I (y_{ij} - y_{..})^2$	$IJ - 1$	$MS = \frac{S}{IJ - 1}$	
$S_A = J \sum_{i=1}^I (y_{i.} - y_{..})^2$	$I - 1$	$MS_A = \frac{S_A}{I - 1}$	$\frac{MS_A}{MS_R}$
$S_B = I \sum_{j=1}^J (y_{.j} - y_{..})^2$	$J - 1$	$MS_B = \frac{S_B}{J - 1}$	$\frac{MS_B}{MS_R}$
$\sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I (y_{ij} - y_{.j} - y_{i.} + y_{..})^2$	$(I - 1)(J - 1)$	$MS_R = \frac{S_R}{(I - 1)(J - 1)}$	

Отметим, что в данном варианте двухфакторного анализа для каждого сочетания факторов A и B получена всего одна реплика.

Результаты двухфакторного анализа могут быть представлены в виде результатов однофакторного анализа для отдельного учета влияния факторов A и B . В последнем случае число уровней фактора $B(A)$ используется как число репликаций при анализе фактора $A(B)$.

Результаты двухфакторного и однофакторных анализов могут оказаться различными, так как при многофакторном анализе остаточная сумма квадратов S_R существенно меньше, а число степеней свободы уменьшается незначительно: $IJ - I - J + 1$ против $IJ - I$.

Многофакторный анализ (Mylti-Way ANOVA) с учетом совместного влияния факторов

Предполагается следующая модель влияния факторов на отклик:

$$y = \mu + \alpha_A A + \alpha_B B + \alpha_{AB} AB + \varepsilon.$$

Обозначения:

$i = 1, 2, \dots, I$; I – число уровней фактора A ;

$j = 1, 2, \dots, J$; J – число уровней фактора B ;

$m = 1, 2, \dots, M$; M – число реплик для каждого сочетания ij уровней факторов A и B .

Рассматриваются три нулевые гипотезы: о несущественности влияния фактора **A** и фактора **B** и одна о несущественности совместного влияния факторов **A** и **B** (фактора **AB**).

Расчет сумм квадратов отклонений осуществляется по следующим очевидным формулам.

$$\begin{aligned}
 S &= \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I \sum_{m=1}^M (y_{ijm} - y_{...})^2; \\
 S_A &= \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I \sum_{m=1}^M (y_{i..} - y_{...})^2 = JM \sum_{i=1}^I (y_{i..} - y_{...})^2; \\
 S_B &= \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I \sum_{m=1}^M (y_{.j.} - y_{...})^2 = IM \sum_{j=1}^J (y_{.j.} - y_{...})^2; \\
 S_{AB} &= \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I \sum_{m=1}^M (y_{ij.} - y_{i..} - y_{.j.} + y_{...})^2 \\
 &= M \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (y_{ij.} - y_{i..} - y_{.j.} + y_{...})^2; \\
 S_R &= S - S_A - S_B - S_{AB}.
 \end{aligned}$$

где $y_{ij.}$, $y_{i..}$, $y_{.j.}$, $y_{...}$ – означают в строчку осреднение по индексам, замененным точками.

Расчет оценок дисперсий и значений статистики Фишера представлен в табл. 4.

Таблица 4

Сумма квадратов	Число степеней свободы	Оценка дисперсии	F – статистика Фишера
S	IJM – 1	$MS = \frac{S}{IJ - 1}$	
S_A	I – 1	$MS_A = \frac{S_A}{I - 1}$	$\frac{MS_A}{MS_R}$
S_B	J – 1	$MS_B = \frac{S_B}{J - 1}$	$\frac{MS_B}{MS_R}$
S_{AB}	(I – 1)(J – 1)	$MS_{AB} = \frac{S_{AB}}{(I - 1)(J - 1)}$	$\frac{MS_{AB}}{MS_R}$
S_R	IJ(M – 1)	$MS_R = \frac{S_R}{IJ(M - 1)}$	

Важно учитывать, что совместное влияние факторов имеет смысл рассматривать только при условии **M** > 1. В противном случае остаточная сумма квадратов **S_R** будет равна нулю [3].

В дальнейшей работе будет проведено сравнение результатов обработки данных по разным критериям.

Список литературы

1. Митропольский А. К. Техника статистических вычислений : учебник. 2-е изд., перераб. и доп. М. : Наука, 1971. 576 с.
2. Banks J., Carson J. S., Nelson B. L. Discrete-Event System Simulation. 2nd ed. New Jersey : Prentice-Hall, 1996. 548 p.
3. Сиднев А. Методологические указания к лабораторным работам по теме «Применение дисперсионного анализа в среде GPSS World» : учеб. пособие. СПб. : Изд-во Санкт-Петербургского государственного политехнического университета, 2014. 16 с.

ПРИЛОЖЕНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ИНЖЕНЕРНОМ ДЕЛЕ

*Андрей Николаевич Макеев¹,
Татьяна Вячеславовна Черушева²*

^{1,2} Пензенский государственный университет, Пенза, Россия
¹ anesterov979@gmail.com, ² tank1100@yandex.ru

Аннотация. Рассмотрено применение различных поверхностей в строительстве.

Ключевые слова: поверхности, строение

APPLICATIONS OF SECOND ORDER SURFACES IN ENGINEERING

Andrey N. Makeev¹, Tatyana V. Cherusheva²

^{1,2} Penza State University, Penza, Russia
¹ anesterov979@gmail.com, ² tank1100@yandex.ru

Abstract. Application of various surfaces in construction is considered.

Keywords: surfaces, building

Поверхность второго порядка – это геометрическое место точек в трехмерном пространстве, которые удовлетворяют уравнению

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Gx + Hy + Iz + J = 0.$$

Поверхность второго порядка имеет много применений в различных областях, включая математику, физику и инженерию. Например, она может использоваться для моделирования трехмерных объектов, определения формы и размера объектов, а также для решения физических задач, связанных с распределением электрического или магнитного поля.

Рассмотрим приложения поверхностей в архитектуре.

Эллиптический цилиндр – это геометрическая фигура, которая выглядит как длинная труба, но с эллиптическими основаниями (рис. 1).

На рис. 2 представлено здание, имеющее форму кругового цилиндра.

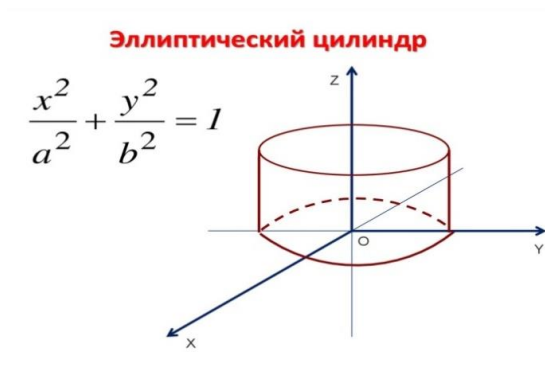


Рис. 1. Эллиптический цилиндр Рис. 2. Дом в форме кругового цилиндра

Можно найти множество примеров эллиптических цилиндров в повседневной жизни. Например, многие трубы, включая трубы для транспортировки газа или воды, имеют форму эллиптического цилиндра. Также эллиптические цилиндры используются в промышленности, например, в производстве бочек или контейнеров. А также их можно увидеть в архитектуре, т.е. это различные сооружения, в частности необычные дома. Эллиптические цилиндры также имеют ряд интересных свойств. Например, у них нет вершин или углов, они состоят только из кривых линий. Это делает их особенно прочными и устойчивыми к давлению, так как кривые линии лучше распределяют силы.

Параболический цилиндр – это особая геометрическая фигура, которая выглядит как цилиндр, но с изогнутой поверхностью, которая направлена так, как растет парабола.

Параболические цилиндры имеют много применений в реальной жизни. Параболический цилиндр – это особая геометрическая фигура, которая имеет форму цилиндра, но с изогнутой поверхностью, направление которой определяется параболой. Он имеет много применений в различных областях, и его особенности делают его очень полезным инструментом для сбора и фокусировки энергии или сигналов. Например, они используются в солнечных коллекторах, чтобы собирать и концентрировать солнечную энергию, где можно использовать тепло или создавать электричество. Также параболические цилиндры используются в антеннах для сбора и усиления радиосигналов.

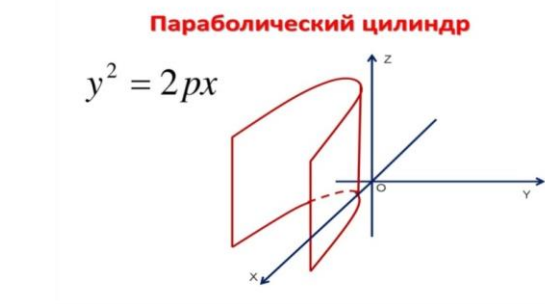


Рис. 3. Параболический цилиндр

Рис. 4. Строение в форме параболического цилиндра

Гиперболический цилиндр – это геометрическая фигура, которая выглядит как цилиндр, но с кривыми боковыми поверхностями, называемыми гиперболами. Гипербола – это кривая, которая имеет две ветви, которые расходятся в бесконечность. Гиперболические цилиндры могут быть разных размеров и форм. Например, у них может быть разная высота и радиус. Они могут быть расположены вертикально или горизонтально, в зависимости от того, как они используются и для каких целей. Гиперболические цилиндры имеют много применений в различных областях. Например, они используются в архитектуре для создания уникальных и интересных форм зданий. Они также используются в математике и физике для иллюстрации гиперболических функций и гиперболических уравнений.

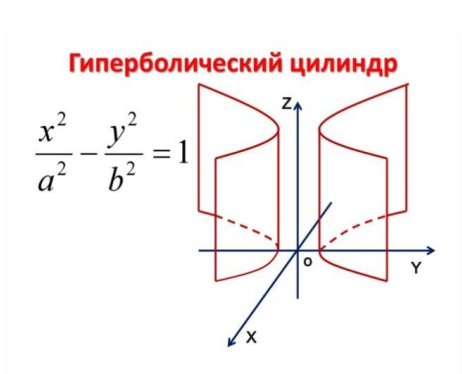


Рис. 5. Гиперболический цилиндр



Рис. 6. Строение в форме гиперболического цилиндра

Коническая поверхность второго порядка – это геометрическая фигура, которая может быть описана уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$. Коническая поверхность имеет форму конуса или его части и является интересным объектом изучения в математике и геометрии. Конические поверхности 2-го порядка встречаются в различных областях науки и техники. Например, они могут использоваться для моделирования формы спутников, аэродинамических крыльев или оптических линз.

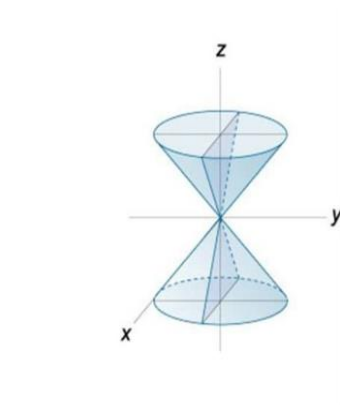


Рис. 7. Конус



Рис. 8. Строение в форме конуса

Эллипсоид вращения – это фигура, которая образуется, когда эллипс поворачивается вокруг своей оси симметрии. Это означает, что эллипс поворачивается, как если бы он был нанизан на ось и вращался вокруг неё.

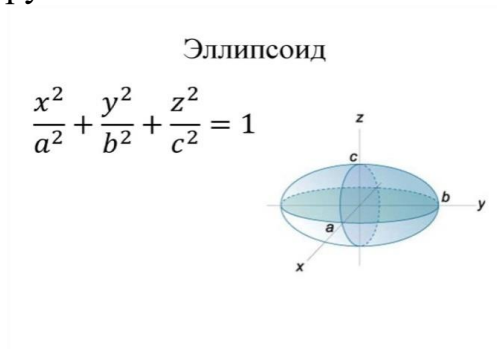


Рис. 9. Эллипсоид

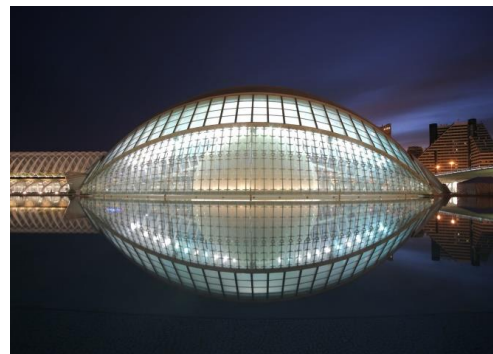


Рис. 10. Строение в форме эллипсоида вращения

Эллипсоиды вращения встречаются во многих сферах науки и техники. Например, они используются в геодезии для моделирования формы Земли, а также в аэродинамике для описания формы тела летательных аппаратов. Они также встречаются в природе, например, в форме планет и спутников.

Однополостный гиперболоид вращения – поверхность, образованная вращением гиперболы вокруг её мнимой оси.

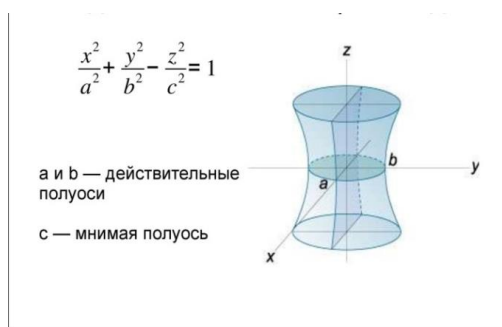


Рис. 11. Однополостный гиперболоид



Рис. 12. Строение в форме однополостного гиперболоида

Российский учёный, инженер и архитектор Владимир Григорьевич Шухов ввёл в архитектуру форму однополостного гиперболоида вращения $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$. Это поверхность, образованная вращением гиперболы вокруг её мнимой оси. Шухов создал и на практике впервые применил гиперболоидные конструкции. Такой конструкцией, например, является знаменитая Шуховская башня в Москве, которая была

построена в 1922 году в виде уходящих в высоту секций-гиперболоидов из стальной сетчатой оболочки. Гиперболоидные конструкции позже использовали в строительстве многие известные архитекторы: Антонио Гауди, Ле Корбюзье и другие.



Рис. 14. Шуховская башня

Гиперболический параболоид (рис. 15) – поверхность, напоминающая седло. Уравнение гиперболического параболоида $z = 2px^2 - 2qy^2$. Поверхность образуется при таком движении параболы с ветвями вниз, что её вершина скользит по другой, неподвижной параболе с ветвями вверх. Плоскости парабол в каждый момент времени перпендикулярны, оси параллельны.

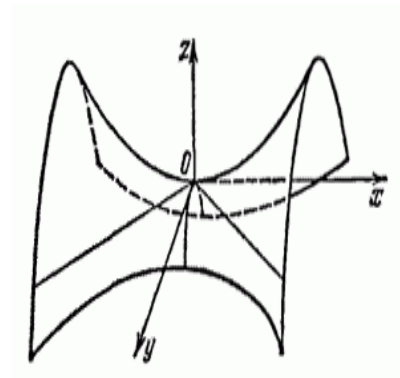


Рис. 15



Рис. 16. Китайская пагода

Гиперболический параболоид может быть использован для моделирования различных объектов и явлений. Например, его форма может использоваться для создания аэродинамических профилей в авиации или корпусов судов. Он также может быть использован для моделирования поверхности воды, что полезно при проектировании бассейнов или фонтанов.

Поверхности второго порядка встречаются не только в математике в виде графиков и уравнений, но и в самой жизни, можно сказать, нас это окружает.

Список литературы

1. Грубе Г.-Р., Кучмар А. Путеводитель по архитектурным формам. М. : Архитектура-С, 2014. 216 с.
2. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Аналитическая геометрия. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2002. 240 с.

СОДЕРЖАНИЕ

СТУДЕНЧЕСКАЯ СЕКЦИЯ

<i>Бибарсов И. И., Шильчиков В. С., Масленников А. А.</i> ПРОГРАММНЫЕ АЛГОРИТМЫ ГЕНЕРАТОРОВ СЛУЧАЙНЫХ ЧИСЕЛ	3
<i>Буран В. О.</i> СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА РИСКОВ ПРИОБРЕТЕНИЯ ЛИЧНОГО ТРАНСПОРТНОГО СРЕДСТВА В СЛОЖНОЙ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ СИТУАЦИИ	8
<i>Бутков М. А., Романова Е. Г.</i> НЕЙРОМАТЕМАТИКА	13
<i>Бутусов А. В.</i> ПРИМЕНЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ К ОПИСАНИЮ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ	18
<i>Вечкасов Д. Р., Тында А. Н.</i> АППРОКСИМАЦИЯ ИНТЕГРАЛОВ ОТ БЫСТРО ОСЦИЛЛИРУЮЩИХ ФУНКЦИЙ	23
<i>Волынский А. Д.</i> МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ФУНКЦИЙ	30
<i>Гарькаева М. П., Романова Е. Г.</i> ШИФР ЦЕЗАРЯ	36
<i>Дроздов А. М., Черушева Т. В.</i> ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА	40
<i>Кондратьев А. М.</i> ПРИМЕНЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ К РЕШЕНИЮ ФИЗИЧЕСКИХ ЗАДАЧ НА ТЕПЛООБМЕН	45
<i>Зверовщикова Н. В., Мойко И. М., Косолапова Е. А.</i> ИСКУССТВЕННЫЙ ИНТЕЛЛЕКТ И НЕЙРОМАТЕМАТИКА: СОВРЕМЕННЫЕ ДОСТИЖЕНИЯ И ПЕРСПЕКТИВЫ	50

Леванова А. Д. ПРИМЕНЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ К РЕШЕНИЮ ФИЗИЧЕСКИХ ЗАДАЧ НА ДВИЖЕНИЕ	56
Майоров А. О. АЛГОРИТМ БЫСТРОГО ВЫЧИСЛЕНИЯ ОБРАТНОГО КВАДРАТНОГО КОРНЯ	60
Мойко Н. В., Зверовщикова Н. В., Макеев В. Д. ИСКУССТВЕННЫЙ ИНТЕЛЛЕКТ И ФИНАНСЫ: ИСПОЛЬЗОВАНИЕ АЛГОРИТМОВ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ ДЛЯ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ РЫНКА И ОПТИМИЗАЦИИ ИНВЕСТИЦИЙ	66
Меркурьев М. И. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ ДЛЯ АЛГОРИТМИЧЕСКОЙ ТОРГОВЛИ НА ФИНАНСОВЫХ РЫНКАХ	72
Мойко И. М., Ушкин Д. А. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ	77
Мойко И. М., Папшева Д. В. КОЛЕБАНИЯ В БИОЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ: МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ	83
Папшева Д. В. СГЛАЖИВАНИЕ БОЛЬШОГО КОЛИЧЕСТВА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ В СРЕДНЕИНТЕГРАЛЬНОМ СМЫСЛЕ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ	89
Паршин А. С., Пичугина П. Г. ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ И ВРЕДНЫЕ ПРИВЫЧКИ	94
Почивалов А. А., Купряшина Л. А. ПРИМЕНЕНИЕ ЧИСЛЕННОГО МЕТОДА ЭЙЛЕРА В ЗАДАЧАХ РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ	98

Мойко Н. В., Зверовщикова Н. В., Рыжманова Е. Д. ПРИМЕНЕНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ ДЛЯ ОБЕСПЕЧЕНИЯ БЕЗОПАСНОСТИ АВТОМАТИЗИРОВАННЫХ СИСТЕМ	103
Семенов И. В. ПРИЛОЖЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ О НАГРЕВЕ И ОХЛАЖДЕНИИ ТЕЛ	109
Скибицкая Н. Ю., Богатырева А. А. ВЕРОЯТНОСТНАЯ ОЦЕНКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ДАННЫХ ПОДВЕРЖЕННОСТИ РАЗЛИЧНЫХ СЛОЕВ НАСЕЛЕНИЯ БОЛЕЗНИ АЛЬЦГЕЙМЕРА	112
Подольский Я. П., Судьёва А. С. АНАЛИЗ УЯЗВИМОСТИ СОВРЕМЕННЫХ КОМПЬЮТЕРНЫХ СИСТЕМ К АТАКАМ ЧЕРЕЗ USB-ПОРТЫ	120
Темникова А. В., Грозная Е. В. АППРОКСИМАЦИЯ ИНТЕГРАЛОВ ПО ПОЛУОСИ	124
Усачев М. А. СИНК-АППРОКСИМАЦИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ НА ОТРЕЗКЕ $[0; \pi]$	128
Фадеев А. В., Черушева Т. В. ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТИ В ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИКЕ	134
Футанов К. Е. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПРОСТЕЙШИХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ	139
Хайдаров Л. Ш., Бельдягина Е. Ю. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РУНГЕ – КУТТЫ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ	144
Скибицкая Н. Ю., Хохлов Е. С., Мартынов И. А. ПОСТРОЕНИЕ И АНАЛИЗ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ФАКТОРОВ, ВЛИЯЮЩИХ НА НАРУШЕНИЕ СНА	150

<i>Целаев Д. О.</i> АППРОКСИМАЦИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ НА ОТРЕЗКЕ МЕТОДОМ ПАДЕ	155
<i>Черных Е. М., Тарасов Д. В.</i> ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО МЕТОДУ РОМБЕРГА	160
<i>Зверовщикова Н. В., Мойко И. М., Шатов В. С.</i> АНАЛИЗ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ В ЭКОНОМИКЕ И ФИНАНСАХ	165
<i>Мойко Н. В., Зверовщикова Н. В., Шишканова Е. В.</i> ИСКУССТВЕННЫЙ ИНТЕЛЛЕКТ: ОСНОВНЫЕ КОНЦЕПЦИИ, ПРИМЕНЕНИЕ И ЭТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ	173
<i>Яковлева А. Д., Черушева Т. В.</i> ПРОБЛЕМЫ МНОГОФАКТОРНОГО АНАЛИЗА	179
<i>Макеев А. Н., Черушева Т. В.</i> ПРИЛОЖЕНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ИНЖЕНЕРНОМ ДЕЛЕ	186

Научное издание

Аналитические и численные методы
моделирования естественно-научных
и социальных проблем
(АЧМ–2023)

Россия, г. Пенза, 6–10 ноября 2023 г.

Часть 2

П о д р е д а к ц и е й
доктора физико-математических наук,
профессора Ильи Владимировича **Бойкова**

Все материалы представлены в авторской редакции

Корректор *А. А. Есавкина*
Компьютерная верстка *Н. В. Ивановой*
Дизайн обложки *Е. В. Карасёвой*

Подписано в печать 22.12.2023.
Формат 60×84¹/₁₆. Усл. печ. л. 11,39.
Заказ № 774.2. Тираж 70.

Издательство ПГУ.
440026, г. Пенза, ул. Красная, 40.
Тел.: (8412) 66-60-49, 66-67-77; e-mail: iic@pnzgu.ru